Régularité des solutions des problèmes d'élasticité et d'écoulement de Stokes dans un polygone

Benjamin Guélat

octobre 2000 - janvier 2001

Travail de diplôme en mathématiques
sous la direction de
Prof. C. Schwab
ETH Zürich

Résumé

Dans un polygone $\Omega \in \mathbb{R}^2$, nous analysons la régularité du problème d'élasticité linéaire dans une formulation mixte, contenant le problème de Stokes comme cas particulier. Nous établissons la régularité des solutions dans des espaces de Sobolev pondérés. Les résultats obtenus peuvent s'appliquer à l'analyse de convergence de méthodes d'éléments finis.

1 Introduction

Dans un polygone Ω, nous considérons le problème d'élasticité à deux dimensions suivant :

$$-\underline{\nabla} \cdot \{2\mu \underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}] + \lambda(\underline{\nabla} \cdot \underline{u})\mathbb{I}\} = \underline{f} \tag{1.1}$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}] = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\,\underline{u} + \underline{\nabla}\,\underline{u}^{\top})$, $\underline{u} = \binom{u_1}{u_2}$ représente la déformation, $\underline{f} = \binom{f_1}{f_2}$ la densité de force exercée sur le corps et $\mathbb{I}$ la matrice 2×2 identité. λ et μ sont les constantes de Lamé. Pour obtenir une formulation mixte, nous introduisons $p := -\frac{\lambda}{\mu}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u})$ ainsi que $\varepsilon := \frac{1-2\nu}{2\nu} = \frac{\mu}{\lambda}$ où $\nu \in]0, \frac{1}{2}]$ est le nombre de Poisson, relié aux constantes de Lamé par la formule $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$. Nous avons alors le système

$$\begin{aligned} -\underline{\nabla} \cdot \{2\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}] - p\mathbb{I}\} &= \underline{f}/\mu =: \underline{f} \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \varepsilon p &= 0. \end{aligned}$$

Nous remarquons que pour $\varepsilon = 0$ ($\Leftrightarrow \nu = \frac{1}{2}$) il s'agit du problème de Stokes incompressible. Pour plus de généralité, nous considérerons le système

$$\begin{aligned} -\underline{\nabla} \cdot \{2\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}] - p\mathbb{I}\} &= \underline{f} \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \varepsilon p &= h, \end{aligned} \tag{1.2}$$

de sorte que le cas $\varepsilon = 0$ correspond au problème de Stokes général.

Le présent travail analyse la régularité de la solution de (1.2). En particulier, nous montrons (théorème 5.3) que, sous certaines hypothèses sur les données, $\underline{u} \in H^{2,2}_{\beta}(\Omega)^2$, $p \in H^{1,1}_{\beta}(\Omega)$. Un résultat essentiel (théorème 5.4) montre la régularité dans les espaces $B^l_{\beta}(\Omega)$, ce qui permet de prouver la convergence des méthodes d'éléments finis (voir par exemple [1]).

Dans [2], l'analyse a été effectuée pour le problème de Stokes, c'est-à-dire pour le problème (1.2) avec $\varepsilon = 0$; nous allons ici généraliser les résultats au cas $\varepsilon \geq 0$ quelconque. Ainsi, nous traitons tout ensemble les équations d'élasticité en formulation mixte ((1.2) avec h=0, $\varepsilon > 0$) et les équations de Stokes ((1.2) avec $\varepsilon = 0$).

Dans [3], le problème d'élasticité (1.1) a été analysé dans sa formulation standard; ces résultats ne sont cependant pas directement applicables dans notre situation car ils ne donnent pas la régularité de la "pression" p.

La démarche que nous utilisons ici et les résultats intermédiaires sont exactement les mêmes que dans [2]. Dans la section 3, nous formulons le problème varationnel et montrons l'existence dans l'espace de Sobolev classique $H^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$. La section 4 est consacrée à l'analyse de la solution dans un secteur infini $Q = \{(r, \theta) : r > 0,\ 0 < \theta < \omega\}$. Enfin, dans la section 5, nous utilisons les résultats de la section précédente pour montrer la régularité au voisinage des sommets, et finalement en déduire la régularité dans le polygone entier.

2 Préliminaires

Nous désignons par $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un polygone à M côtés dans le plan, avec les sommets A_i, les angles ω_i et les arêtes Γ_i reliant A_i et $A_{i+1}, i = 1, \ldots, M$. Les indices i sont compris modulo M, i.e. $A_{M+1} = A_1$, $\Gamma_{M+1} = \Gamma_1$, $\omega_{M+1} = \omega_1$ (fig. 1). Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{N}$ une partition de $\{1, \ldots, M\}$. Posons $\Gamma^0 := \bigcup_{i \in \mathcal{D}} \bar{\Gamma}_i, \Gamma^1 := \bigcup_{i \in \mathcal{N}} \bar{\Gamma}_i$. Nous avons donc

$$\Gamma = \partial\Omega = \Gamma^0 \cup \Gamma^1,\ \Gamma^0 \cap \Gamma^1 = \emptyset.$$

Soit ensuite $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_M)$ un M-tuple de nombres réels tels que $0 < \beta_i < 1$, $1 \leq i \leq M$, et soit la fonction de poids

$$\Phi_{\beta+k}(x) := \prod_{i=1}^{M} (r_i(x))^{\beta_i + k},$$

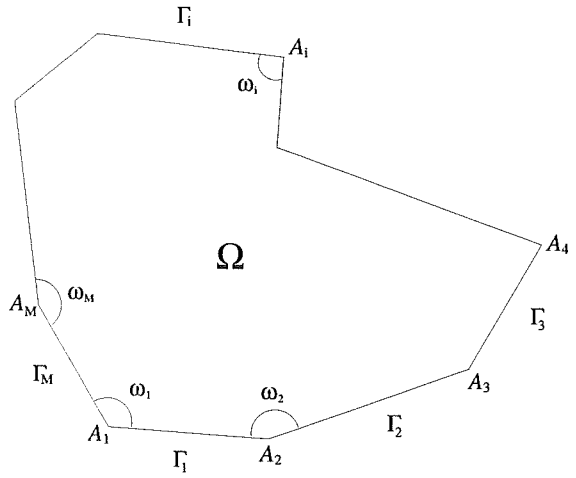

FIG. 1 – polygone Ω

où $r_i = \mathrm{dist}(x, A_i)$ représente la distance euclidienne au $i^{ème}$ sommet et k un nombre entier naturel. Nous désignons par $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, l'espace de Sobolev habituel, et par $H^{k,l}_\beta(\Omega)$, $k \geq l \geq 0$, l'espace de Sobolev pondéré muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^{k,0}_\beta(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=0}^{k} \|\Phi_{\beta+|\alpha|} D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad (l = 0),$$

$$\|u\|^2_{H^{k,l}_\beta(\Omega)} := \|u\|^2_{H^{l-1}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=l}^{k} \|\Phi_{\beta+|\alpha|-l} D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad (l > 0).$$

Nous avons ici utilisé la notation

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$$

pour les dérivées partielles en coordonnées cartésiennes. Pour $k = l = 0$, nous écrivons $L_\beta(\Omega) := H^{0,0}_\beta(\Omega)$.

Soit $Q = \{(r, \theta) : 0 < r < \delta, 0 < \theta < \omega\}$ un secteur fini ($\delta < \infty$) ou infini ($\delta = \infty$). Nous utilisons la notation

$$\mathcal{D}^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial r^{\alpha_1} \partial \theta^{\alpha_2}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$$

pour la dérivée d'ordre α en coordonnées polaires (r, θ) et définissons $\mathcal{H}^{k,l}_\beta(Q)$ l'espace de Sobolev pondéré relatif au coordonnées polaires

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{\mathcal{H}^{k,0}_\beta(Q)} &:= \sum_{|\alpha|=0}^{k} \|r^{\beta+\alpha_1} \mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(Q)} \\
&= \sum_{|\alpha|=0}^{k} \int_0^\omega \int_0^\delta r^{2(\beta+\alpha_1)} |\mathcal{D}^\alpha u(r,\theta)|^2 r \, dr \, d\theta \quad (l = 0), \\
\|u\|^2_{\mathcal{H}^{k,l}_\beta(Q)} &:= \|u\|^2_{H^{l-1}(Q)} + \sum_{|\alpha|\geq l}^{k} \|r^{\beta+\alpha_1-l} \mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(Q)} \quad (l > 0).
\end{aligned}$$

Nous aurons en outre besoin d'espaces $W^k_\beta(Q)$ introduits par Kondratev ([4, 5, 6]), définis par leur norme

$$\|u\|^2_{W^k_\beta(Q)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \int_Q r^{2(\beta-k+\alpha_1)} |\mathcal{D}^\alpha u|^2 r\, dr\, d\theta.$$

Nous définissons encore $D = \{(\tau,\theta) : \tau \in \mathbb{R},\ 0 < \theta < \omega\}$ ainsi que l'espace $H^k_h(D)$ par sa norme

$$\|u\|^2_{H^k_h(D)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \int_D e^{2h\tau} |D^\alpha u|^2\, d\tau\, d\theta$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}, h > 0$.

Dans le polygone Ω, l'espace $B^l_\beta(\Omega), l = 0,1,2$, est défini comme suit :

$$\begin{aligned} B^l_\beta(\Omega) \quad := \quad & \{u \in \bigcap_{k\geq l} H^{k,l}_\beta(\Omega) : \forall\ k \geq l \text{ et } \forall\ \alpha \text{ tel que } |\alpha| = k, \\ & \|\Phi_{\beta+k-l} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \leq C d^{k-l}(k-l)!, \text{ où } C, d \geq 1 \\ & \text{sont des constantes indépendantes de } k\} \end{aligned}$$

De manière analogue, nous définissons dans le secteur fini $S = \{(r,\theta) : 0 < r < \delta, 0 < \theta < \omega\}$, cette fois en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^l_\beta(S) \quad := \quad & \{u \in \bigcap_{k\geq l} \mathcal{H}^{k,l}_\beta(S) : \forall\ k \geq l \text{ et } \forall\ \alpha \text{ tel que } |\alpha| = k, \\ & \|\Phi_{\beta+\alpha_1-l} \mathcal{D}^\alpha u\|_{L^2(S)} \leq C d^{k-l}(k-l)!, \text{ où } C, d \geq 1 \\ & \text{sont des constantes indépendantes de } k\} \end{aligned}$$

Nous utiliserons par la suite $H^{k-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^m)$ et $B^{l-\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^m)$, les espaces de trace de $H^{k,l}_\beta(\Omega)$ et $B^l_\beta(\Omega)$ sur Γ^m, $m = 0,1$, $k \geq l = 1,2$, et

$$\|g\|_{H^{k-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^m)} = \inf_{G|_{\Gamma^m}=g} \|G\|_{H^{k,l}_\beta(\Omega)},$$

$$\|g\|_{B^{l-\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^m)} = \inf_{G|_{\Gamma^m}=g} \|G\|_{B^l_\beta(\Omega)}$$

L'espace $W^{k-\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^m)$ est défini de façon analogue.

Le théorème suivant montre que les espaces de Sobolev pondérés sont équivalents en coordonnées cartésiennes et polaires :

Théorème 2.1 *Soit $S = \{(r,\theta) : 0 < r < \delta, 0 < \theta < \omega\}$ un secteur fini, $0 < \beta < 1$ et $\Phi_\beta = r^\beta$. Alors, pour $l = 0,1,2$ et pour tout $k \geq l$, on a*

$$u \in H^{k,l}_\beta(S) \iff u \in \mathcal{H}^{k,l}_\beta(S), \quad u \in B^l_\beta(S) \iff u \in \mathcal{B}^l_\beta(S).$$

Pour la démonstration, nous renvoyons à [7].

3 Formulation du problème, existence et unicité

Dans le polygone Ω, on considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma}[\underline{u}, p] & = & \underline{f} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \varepsilon\, p & = & h & \text{dans } \Omega \\ \underline{u}|_{\Gamma^0} & = & \underline{g}^0 & \text{sur } \Gamma^0 \\ \underline{\sigma}[\underline{u}, p]\underline{n} & = & \underline{g}^1 & \text{sur } \Gamma^1 \end{array} \right. \tag{3.1}$$

où $\varepsilon = \frac{1-2\nu}{2\nu} > 0$, $\underline{n}$ désigne le vecteur normal dirigé vers l'extérieur, et $\underline{\underline{\sigma}}$ est donné par

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}] - p\mathbb{I}, \tag{3.2}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + (\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u})^{\top})$$

Nous écrirons également l'équation ci-dessus de façon abrégée sous la forme

$$\begin{array}{rcll} L\binom{\underline{u}}{p} & = & \binom{\underline{f}}{h} & \text{dans } \Omega, \\ B\binom{\underline{u}}{p} & = & \begin{cases} \underline{g}^0 \\ \underline{g}^1 \end{cases} & \text{sur } \Gamma. \end{array} \tag{3.3}$$

Nous supposerons pour les données que

$$\underline{f} \in L_\beta(\Omega)^2, \quad h \in H^{1,1}_\beta(\Omega), \quad \underline{g}^l \in H^{\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}_\beta(\Gamma^l)^2, \quad l = 1, 2. \tag{3.4}$$

Nous allons maintenant exprimer notre problème sous forme variationnelle. Nous définissons à cet effet

$$W_0 := \begin{cases} \{\underline{u} \in H^1(\Omega)^2 : \underline{u}|_{\Gamma^0} = \underline{0}\} & \text{si } |\Gamma^0| > 0 \\ \{\underline{u} \in H^1(\Omega)^2 : (\underline{u}, \underline{r})_\Omega = 0 \ \forall \underline{r} \in \mathcal{R}\} & \text{si } |\Gamma^0| = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

$$L_0 := \begin{cases} L^2(\Omega) & \text{si } |\Gamma^1| > 0 \text{ ou } \varepsilon > 0 \\ L^2_0(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \ (q, 1)_\Omega = 0\} & \text{si } |\Gamma^1| = 0 \text{ et } \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

où

$$\mathcal{R} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}\}$$

est l'espace des déplacements rigides.
Intégrant la première équation de (3.1) contre $\underline{v} \in W_0$ et la deuxième contre $q \in L_0$, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} 2(\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}], \underline{\underline{\epsilon}}[\underline{v}])_\Omega - (p, \underline{\nabla} \cdot \underline{v})_\Omega & = & (\underline{f}, \underline{v})_\Omega + (\underline{g}^1, \underline{v})_{\Gamma^1} \\ (q, \underline{\nabla} \cdot \underline{u})_\Omega + \varepsilon(q, p)_\Omega & = & (h, q)_\Omega \end{array}$$

où $(\ \ ,\ \ )_\Omega$ et$(\ \ ,\ \ )_{\Gamma^1}$ représentent les produits intérieurs de $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma^1)$.
Posant $\underline{u}_1 = \underline{u} - \underline{G}^0$ avec

$$\underline{G}^0 \in H^{2,2}_\beta(\Omega)^2, \quad \underline{G}^0|_{\Gamma^0} = \underline{g}^0, \quad \|\underline{g}^0\|_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_\beta(\Gamma^0)^2} \leq \|\underline{G}^0\|_{H^{2,2}_\beta(\Omega)^2} \leq 2\|\underline{g}^0\|_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_\beta(\Gamma^0)^2} \tag{3.7}$$

ainsi que

$$a(\underline{u}, \underline{v}) := 2(\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}], \underline{\underline{\epsilon}}[\underline{v}])_\Omega, \quad b(p, \underline{v}) := -(p, \underline{\nabla} \cdot \underline{v})_\Omega, \tag{3.8}$$

$$F(\underline{v}) := (\underline{f}, \underline{v})_\Omega + (\underline{g}^1, \underline{v})_{\Gamma^1} - a(\underline{G}^0, \underline{v}), \quad l(q) := -(h, q)_\Omega - b(q, \underline{G}^0) \tag{3.9}$$

nous avons alors le problème variationnel suivant :

$$\begin{array}{rcll} a(\underline{u}_1, \underline{v}) + b(p, \underline{v}) & = & F(\underline{v}) & \forall \underline{v} \in W_0 \\ b(q, \underline{u}_1) - \varepsilon(p, q)_\Omega & = & l(q) & \forall q \in L_0. \end{array} \tag{3.10}$$

Nous aurons besoin des deux propositions suivantes :

Proposition 3.1 *Soit* $J_0 := \{\underline{v} \in W_0 : \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0\}$ *et* $J_0^\perp := \{\underline{v} \in W_0 : (\underline{v}, \underline{w})_\Omega = 0 \quad \forall \underline{w} \in J_0\}$, L_0 *comme plus haut. Alors, pour tout* $q \in L_0$ *il existe un unique* $\underline{u}_q \in J_0^\perp$ *tel que*

$$-\underline{\nabla} \cdot \underline{u}_q = q$$

et

$$\|\underline{u}_q\|_{W_0} \leq C\|q\|_{L_0}$$

Pour la preuve, voir [8], corollary 2.4 p.24.

Proposition 3.2 *Soit X, M des espaces de Hilbert réels et a, b, des formes bilinéaires continues*

$$a : X \times X \mapsto \mathbb{R}, \quad b : M \times X \mapsto \mathbb{R}.$$

Soient $F \in X', l \in M'$ des fonctionnelles linéaires continues. Supposons encore que a est Z-coercive avec $Z := \{v \in X : b(q,v) = 0 \quad \forall q \in M\}$, i.e.

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_X^2 \quad \forall u \in Z,$$

et que b satisfait la condition inf-sup

$$\inf_{0 \neq q \in M} \sup_{0 \neq v \in X} \frac{b(q,v)}{\|q\|_M \|v\|_X} \geq \gamma > 0. \tag{3.11}$$

Alors il existe un unique couple $(u,p) \in X \times M$ vérifiant :

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(p,v) &= F(v) \quad \forall v \in X \\ b(q,u) &= l(q) \quad \forall q \in M \end{aligned} \tag{3.12}$$

De plus, la solution vérifie l'estimation a-priori

$$\|u\|_X + \|p\|_M \leq C\{\|F\|_{X'} + \|l\|_{M'}\}. \tag{3.13}$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de F et l.

Pour une preuve, voir [9].

Nous pouvons maintenant formuler le résultat principal de cette section :

Théorème 3.1 *Soient $\underline{f}$, h, $\underline{g}^0$ et $\underline{g}^1$ comme dans (3.4). Si $|\Gamma^1| = 0$ et $\varepsilon = 0$, on pose $\underline{g}^1 = 0$ et on impose la relation de compatibilité suivante :*

$$\int_\Omega h \, d\underline{x} + \int_\Gamma \underline{g}^0 \cdot \underline{n} \, ds = 0 \tag{3.14}$$

Si $|\Gamma^0| = 0$, on pose $\underline{g}^0 = 0$, et on impose la relation d'équilibre :

$$\int_\Omega \underline{f} \cdot \underline{r} \, d\underline{x} + \int_\Gamma \underline{g}^1 \cdot \underline{r} \, ds = 0 \quad \forall \underline{r} \in \mathcal{R} = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\-x_1\end{pmatrix}\} \tag{3.15}$$

Alors le problème (3.10) admet une unique solution $(\underline{u}_1, p) \in W_0 \times L_0$ et on a l'estimation a priori

$$\|\underline{u}_1\|_{W_0} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C\{\|\underline{f}\|_{L_\beta(\Omega)} + \|h\|_{H^{1,1}_\beta(\Omega)} + \sum_{l=0}^{1} |\underline{g}^l\|_{H^{\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}_\beta(\Gamma^l)}\} \tag{3.16}$$

Remarque 3.1 *Si $|\Gamma^1| = 0$ et $\varepsilon = 0$ (problème de Stokes avec condition au bord de Dirichlet), intégrant la deuxième équation de (3.1), nous obtenons la relation (3.14) ; remarquons en outre que p est alors défini à une constante près seulement, c'est pourquoi nous pouvons supposer $\int_\Omega p \, d\underline{x} = 0$. Dans le cas du problème de Neumann $|\Gamma^0| = 0$, la relation d'équilibre (3.15) est nécessaire pour garantir $F \in W_0' = (H^1(\Omega)/\mathcal{R})'$.*
Notons en outre que l'estimation a priori (3.16) est toujours valable si l'on remplace $\underline{u}_1 = \underline{u} - \underline{G}^0$ par $\underline{u}$.

Démonstration : les formes bilinéaires a et b sont clairement continues, i.e. il existe des constantes C_a et C_b telles que

$$|a(\underline{u},\underline{v})| \leq C_a\|\underline{u}\|_{W_0}\|\underline{v}\|_{W_0}, \quad |b(p,\underline{v})| \leq C_b\|p\|_{L_0}\|\underline{v}\|_{W_0} \quad \forall p \in L_0, \quad \forall \underline{u},\underline{v} \in W_0$$

Par la première ($|\Gamma^0| > 0$) ou la seconde ($|\Gamma^0| = 0$) inégalité de Korn, a est coercive :

$$a(\underline{u},\underline{u}) \geq \alpha\|u\|^2_{W_0} \quad \forall \underline{u} \in W_0$$

La forme linéaire l est continue :

$$\begin{aligned} |l(q)| &\leq \|h\|_{L^2(\Omega)}\|q\|_{L^2(\Omega)} + C_b\|q\|_{L^2(\Omega)}\|\underline{G}^0\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq 2\max(1,C_b)\|q\|_{L^2(\Omega)}\{\|h\|_{H^{1,1}_\beta(\Omega)} + \|\underline{g}^0\|_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\Omega)}\} \qquad (3.17) \\ & \qquad (3.18) \end{aligned}$$

D'après [7], Lemma 2.10 et 2.11, nous avons

$$|(\underline{f},\underline{v})_\Omega| \leq C_1\|\underline{f}\|_{L_\beta(\Omega)}\|\underline{v}\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{et} \quad |(\underline{g}^1,\underline{v})_{\Gamma^1}| \leq C_2\|\underline{g}^1\|_{H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_\beta(\Omega)}\|\underline{v}\|_{H^1(\Omega)},$$

d'où il suit avec la continuité de a

$$|F(\underline{v})| \leq C_F\|\underline{v}\|_{H^1(\Omega)}\left(\|\underline{f}\|_{L_\beta(\Omega)} + \sum_{l=0}^{1}|\underline{g}^l\|_{H^{\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}_\beta(\Gamma^l)}\right) \qquad (3.19)$$

Supposons tout d'abord $\varepsilon > 0$. Alors le problème (3.10) peut se formuler de manière équivalente : on cherche $(\underline{u}_1,p) \in W_0 \times L_0$ tel que

$$B(\underline{u}_1,p;\underline{v},q) = \tilde{F}(\underline{v},q)$$

avec

$$B(\underline{u}_1,p;\underline{v},q) := a(\underline{u}_1,\underline{v}) + b(p,\underline{v}) - b(q,\underline{u}_1) + \varepsilon(p,q)_\Omega$$

et

$$\tilde{F}(\underline{v},q) := F(\underline{v}) - l(q).$$

D'après ce qui précède, $\tilde{F}$ et B sont continues. De plus,

$$\begin{aligned} B(\underline{u}_1,p;\underline{u}_1,p) &= a(\underline{u}_1,\underline{u}_1) + \varepsilon\|p\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \min(\alpha,\varepsilon)\{\|\underline{u}_1\|_{W_0} + \|p\|_{L^2(\Omega)}\} \end{aligned}$$

autrement dit, B est coercive. Alors le théorème résulte du lemme de Lax-Milgram.

Si $\varepsilon = 0$, nous appliquons la proposition 3.2 avec $M = L_0$, $X = W_0$. Il nous reste à montrer la condition inf-sup (3.11).

Soit $q \in L_0$. D'après la proposition 3.1, il existe $\underline{v}_q \in W_0$ tel que

$$-\underline{\nabla} \cdot \underline{v}_q = q$$

et

$$\|\underline{v}_q\|_{W_0} \leq C\|q\|_{L_0},$$

ce qui implique

$$b(q,\underline{v}_q) = \|q\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C}\|q\|_{L^2(\Omega)}\|\underline{v}_q\|_{W_0}$$

d'où suit (3.11) avec $\gamma = 1/C$. Ainsi le théorème est démontré. □

4 Régularité de la solution dans un secteur infini

On se propose dans cette section d'analyser la régularité de la solution de (3.1) dans un secteur infini.

Soit Q un secteur infini d'angle ω, décrit en coordonnées polaires (r, θ) :

$$Q = \{(r,\theta) : 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \omega\}$$

Nous considérons dans Q le problème (3.1) en composantes :

$$\begin{aligned} -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= f_1 \\ -\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Big) - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= f_2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \varepsilon p &= h \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec une des trois conditions au bord :

$$\underline{u}|_{\theta=0,\omega} = \underline{g}^0 = (g_1^0, g_2^0)^\top \quad \text{(Dirichlet)}, \tag{4.2}$$

$$(-p\underline{n} + 2\underline{\underline{\epsilon}}[u]\underline{n})|_{\theta=0,\omega} = \underline{g}^1 = (g_1^1, g_2^1)^\top \quad \text{(Neumann)}, \tag{4.3}$$

$$\underline{u}|_{\theta=0} = \underline{g}^0, \quad (-p\underline{n} + 2\underline{\underline{\epsilon}}[u]\underline{n})|_{\theta=\omega} = \underline{g}^1 \quad \text{(mixte)} \tag{4.4}$$

où

$$\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

4.1 Un système dépendant d'un paramètre complexe λ

Nous commençons par transformer l'équation (4.1) en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\begin{aligned} -\overline{\Delta} u_r + r^{-2}u_r + 2r^{-2}\partial_\theta u_\theta - \partial_r(\overline{\underline{\nabla}} \cdot \overline{\underline{u}}) + \partial_r p &= f_r \\ -\overline{\Delta} u_\theta + r^{-2}u_\theta - 2r^{-2}\partial_\theta u_r - r^{-1}\partial_\theta(\overline{\underline{\nabla}} \cdot \overline{\underline{u}}) + r^{-1}\partial_\theta p &= f_\theta \\ \partial_r u_r + r^{-1}(u_r + \partial_\theta u_\theta) + \varepsilon p &= h \end{aligned} \tag{4.5}$$

où

$$\overline{\Delta} = \overline{\Delta}_{r\theta} = (\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\theta^2), \qquad \overline{\underline{\nabla}} \cdot \overline{\underline{u}} = (\partial_r u_r + r^{-1}u_r + r^{-1}\partial_\theta u_\theta),$$

$$\overline{\underline{u}} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\underline{f}} = \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}\,\underline{f}.$$

Les conditions au bord deviennent

$$\overline{\underline{u}}|_{\theta=0,\omega} = \overline{\underline{g}}^0 = \begin{pmatrix} g_r^0 \\ g_\theta^0 \end{pmatrix} := \underline{\underline{A}}\,\underline{g}^0 \quad \text{(Dirichlet)}, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \overline{\underline{\sigma}}_n(\overline{\underline{u}}, p)|_{\theta=0,\omega} &:= \begin{pmatrix} r^{-1}\partial_\theta u_r + \partial_r u_\theta - r^{-1}u_\theta \\ -p + 2r^{-1}(\partial_\theta u_\theta + u_r) \end{pmatrix}|_{\theta=0,\omega} = \pm\overline{\underline{g}}^1 \\ &= \pm\begin{pmatrix} g_r^1 \\ g_\theta^1 \end{pmatrix} := \underline{\underline{A}}\,\underline{g}^1 \quad \text{(Neumann)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\overline{\underline{u}}|_{\theta=0} = \overline{\underline{g}}^0, \qquad \overline{\underline{\sigma}}_n(\overline{\underline{u}}, p)|_{\theta=\omega} = \overline{\underline{g}}^1 \quad \text{(mixte)} \tag{4.8}$$

Nous introduisons la variable $t = \ln(\frac{1}{r})$ dans (4.5), ce qui conduit au problème

$$\begin{aligned} -2(\partial_t^2\tilde{u}_t - \tilde{u}_t) - \partial_\theta^2\tilde{u}_t + \partial_t\partial_\theta\tilde{u}_\theta + 3\partial_\theta\tilde{u}_\theta - \partial_t\tilde{p} - \tilde{p} &= \tilde{f}_t \\ \partial_t\partial_\theta\tilde{u}_t - 3\partial_\theta\tilde{u}_t - \partial_t^2\tilde{u}_\theta - 2\partial_\theta^2\tilde{u}_\theta + \tilde{u}_\theta + \partial_\theta\tilde{p} &= \tilde{f}_\theta \\ -\partial_t\tilde{u}_t + \tilde{u}_t + \partial_\theta\tilde{u}_\theta + \varepsilon\tilde{p} &= \tilde{h} \end{aligned} \tag{4.9}$$

dans la bande $D = \{(t,\theta) : -\infty < t < \infty, \quad 0 < \theta < \omega\}$, avec les conditions au bord

$$\underline{\tilde{u}}|_{\theta=0,\omega} = \underline{\tilde{g}}^0 \quad \text{(Dirichlet)}, \tag{4.10}$$

$$\underline{\tilde{\sigma}}_n(\underline{\tilde{u}},\tilde{p})|_{\theta=0,\omega} := \begin{pmatrix} \partial_\theta\tilde{u}_t - \partial_t\tilde{u}_\theta - \tilde{u}_\theta \\ -\tilde{p} + 2(\partial_\theta\tilde{u}_\theta + \tilde{u}_t) \end{pmatrix}|_{\theta=0,\omega} = \pm\underline{\tilde{g}}^1 \quad \text{(Neumann)} \tag{4.11}$$

$$\underline{\tilde{u}}|_{\theta=0} = \underline{\tilde{g}}^0, \qquad \underline{\tilde{\sigma}}_n(\underline{\tilde{u}},\tilde{p})|_{\theta=\omega} = \underline{\tilde{g}}^1 \quad \text{(mixte)}, \tag{4.12}$$

où

$$\underline{\tilde{u}}(t,\theta) := \underline{\overline{u}}(e^{-t},\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_t \\ \tilde{u}_\theta \end{pmatrix}, \quad \tilde{p}(t,\theta) := e^{-t}\overline{p}(e^{-t},\theta),$$

$$\underline{\tilde{f}}(t,\theta) := e^{-2t}\underline{\overline{f}}(e^{-t},\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_t \\ \tilde{f}_\theta \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}(t,\theta) := e^{-t}h(e^{-t},\theta), \quad \underline{\tilde{g}}^l(t,\theta) := e^{-lt}\underline{\overline{g}}^l(e^{-t},\theta), \quad l = 0,1.$$

Finalement, nous appliquons une transformation de Fourier par rapport à t :

$$\underline{\hat{u}} = \mathcal{F}(\underline{\tilde{u}}) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\underline{\tilde{u}}(t,\theta)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

De même, nous définissons $\hat{p} := \mathcal{F}(\tilde{p})$, $\underline{\hat{f}} := \mathcal{F}(\underline{\tilde{f}})$, $\hat{h} = \mathcal{F}(\tilde{h})$, $\underline{\hat{g}}^l = \mathcal{F}(\underline{\tilde{g}}^l)$, $l = 0,1$. Ainsi nous obtenons un système d'équations ordinaire dans l'intervalle $I =]0,\omega[$, dépendant du paramètre complexe λ :

$$\begin{aligned} -\partial_\theta^2\hat{u}_t + 2(1+\lambda^2)\hat{u}_t + (3+i\lambda)\partial_\theta\hat{u}_\theta - (1+i\lambda)\hat{p} &= \hat{f}_t \\ -(3-i\lambda)\partial_\theta\hat{u}_t - 2\partial_\theta^2\hat{u}_\theta + (1+\lambda^2)\hat{u}_\theta + \partial_\theta\hat{p} &= \hat{f}_\theta \\ (1-i\lambda)\hat{u}_t + \partial_\theta\hat{u}_\theta + \varepsilon\hat{p} &= \hat{h} \end{aligned} \tag{4.13}$$

avec une des trois conditions au bord

$$\underline{\hat{u}}|_{\theta=0,\omega} = \underline{\hat{g}}^0 \quad \text{(Dirichlet)}, \tag{4.14}$$

$$\underline{\hat{\sigma}}_n(\underline{\hat{u}},\hat{p})|_{\theta=0,\omega} := \begin{pmatrix} \partial_\theta\hat{u}_t - i\lambda\hat{u}_\theta - \hat{u}_\theta \\ -\hat{p} + 2(\partial_\theta\hat{u}_\theta + \hat{u}_t) \end{pmatrix} = \pm\underline{\hat{g}}^1 \quad \text{(Neumann)} \tag{4.15}$$

$$\underline{\hat{u}}|_{\theta=0} = \underline{\hat{g}}^0, \qquad \underline{\hat{\sigma}}_n(\underline{\hat{u}},\hat{p})|_{\theta=\omega} = \underline{\hat{g}}^1 \quad \text{(mixte)}. \tag{4.16}$$

Posant $\partial_\theta = iD$, nous écrivons (4.13-4.16) de manière symbolique

$$\begin{aligned} \hat{L}(D,\lambda)\left(\begin{smallmatrix}\underline{\hat{u}} \\ \hat{p}\end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix}\underline{\hat{f}} \\ \hat{h}\end{smallmatrix}\right) && \text{dans} \quad I =]0,\omega[, \\ \hat{B}(D,\lambda)\left(\begin{smallmatrix}\underline{\hat{u}} \\ \hat{p}\end{smallmatrix}\right) &= \left\{ \begin{smallmatrix}\underline{\hat{g}}^0 \\ \pm\underline{\hat{g}}^1\end{smallmatrix} \right. && \text{sur} \quad \partial I = \{0,\omega\} \end{aligned} \tag{4.17}$$

avec l'opérateur

$$\hat{L}(D,\lambda) = \begin{pmatrix} D^2 + 2(1+\lambda^2) & (3+i\lambda)iD & -(1+i\lambda) \\ -(3-i\lambda)iD & 2D^2 + 1 + \lambda^2 & iD \\ 1-i\lambda & iD & \varepsilon \end{pmatrix}$$

et les opérateurs sur le bord

$$\hat{B}(D,\lambda)|_{\theta=0,\omega} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Dirichlet)},$$

$$\hat{B}(D,\lambda)|_{\theta=0,\omega} = \begin{pmatrix} iD & -(1+i\lambda) & 0 \\ 2 & 2iD & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(Neumann)},$$

$$\hat{B}(D,\lambda)|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}(D,\lambda)|_{\theta=\omega} = \begin{pmatrix} iD & -(1+i\lambda) & 0 \\ 2 & 2iD & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(mixte)}.$$

Les parties principales $\hat{L}_0(D,\lambda)$, $\hat{B}_0(D,\lambda)$ de ces opérateurs sont définies par

$$\hat{L}_0(D,\lambda) = \begin{pmatrix} D^2+2\lambda^2 & -\lambda D & -i\lambda \\ -\lambda D & 2D^2+\lambda^2 & iD \\ -i\lambda & iD & \varepsilon \end{pmatrix}$$

et

$$\hat{B}_0(D,\lambda)|_{\theta=0,\omega} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Dirichlet)},$$

$$\hat{B}_0(D,\lambda)|_{\theta=0,\omega} = \begin{pmatrix} iD & -i\lambda & 0 \\ 0 & 2iD & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(Neumann)},$$

$$\hat{B}_0(D,\lambda)|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_0(D,\lambda)|_{\theta=\omega} = \begin{pmatrix} iD & -i\lambda & 0 \\ 0 & 2iD & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(mixte)}.$$

Nous souhaitons prouver une estimation a-priori pour la solution de (4.17), qui constituera la base de notre analyse. A cette fin, nous introduisons des normes dans I, dépendantes de λ. Pour $k \in \mathbb{N}$, nous posons donc

$$|||\underline{\hat{u}}|||^2_{H^k(I)} := \sum_{l=0}^{k} |\lambda|^{2l} \|\underline{\hat{u}}\|^2_{H^{k-l}(I)}. \tag{4.18}$$

Grâce à l'interpolation de normes (voir par exemple [10]), nous avons l'équivalence de normes suivante :

$$\|\underline{\hat{u}}\|^2_{H^k(I)} + |\lambda|^{2k}\|\underline{\hat{u}}\|^2_{L^2(I)} \leq |||\underline{\hat{u}}|||^2_{H^k(I)} \leq C\big(\|\underline{\hat{u}}\|^2_{H^k(I)} + |\lambda|^{2k}\|\underline{\hat{u}}\|^2_{L^2(I)}\big) \tag{4.19}$$

où $C > 0$ est indépendante de λ et $\underline{\hat{u}}$.

Nous allons par la suite montrer l'inégalité suivante :
pour $k \geq 2$ entier, $\lambda = \zeta + i\eta$ avec $\eta > 0$ fixe, il existe une constante C indépendante de ζ telle que pour tout $-\infty < \zeta < \infty$

$$|||\underline{\hat{u}}|||^2_{H^k(I)} + |||\underline{\hat{p}}|||^2_{H^{k-1}(I)} \leq C\left(|||\underline{\hat{f}}|||^2_{H^{k-2}(I)} + \sum_{l=0}^{1} |\lambda|^{3-2l}|\underline{\hat{g}}^l|^2 + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(I)}\right) \tag{4.20}$$

Remarquons que les opérateurs $\hat{L}(D,\lambda)$, $\hat{B}(D,\lambda)$ ne sont pas de degré homogène ; nous ne pouvons donc pas, comme dans [3], appliquer les résultats de [10].

Nous allons dans un premier temps montrer (4.20) pour $|\lambda|$ suffisamment grand, d'abord sur la droite réelle entière $I = \mathbb{R}$ (paragraphe 4.2), ensuite sur la demi-droite $I = \mathbb{R}_+$ (paragraphe 4.3) et finalement sur l'intervalle $I =]0,\omega[$ (paragraphe 4.4) par un argument de localisation. Le cas $|\lambda| < constante$ fera l'objet du paragraphe 4.5.
Dans ce qui suit, C et $\tilde{C}$ désigneront des constantes suffisament grandes, leur valeur pouvant augmenter d'une ligne à l'autre.

4.2 Estimation a-priori sur la droite $\mathbb{R}$

Nous commençons par analyser la partie principale du problème (4.17) :

$$\hat{L}_0(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{\underline{f}}\\ \hat{h}\end{pmatrix} \quad \text{dans} \quad I = \mathbb{R}. \tag{4.21}$$

Par une transformation de Fourier par rapport à θ,

$$\hat{\underline{u}}(\lambda,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\theta}\underline{u}(\lambda,\theta)\,d\theta = \hat{\mathcal{F}}(\underline{u}),$$

(4.21) est réduit à un système d'équations algébriques

$$\hat{L}_0(\xi,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\hat{\underline{u}}}\\ \hat{\hat{p}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{\hat{\underline{f}}}\\ \hat{\hat{h}}\end{pmatrix} \quad , \tag{4.22}$$

avec

$$\det \hat{L}_0(\xi,\lambda) = (\xi^2+\lambda^2)^2(1+2\varepsilon)$$

Ainsi, si $\xi^2+\lambda^2 \neq 0$, $\hat{L}_0$ est inversible et (4.22) a pour unique solution

$$\begin{pmatrix}\hat{\hat{\underline{u}}}\\ \hat{\hat{p}}\end{pmatrix} = \hat{L}_0^{-1}(\xi,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\hat{\underline{f}}}\\ \hat{\hat{h}}\end{pmatrix}$$

avec

$$\hat{L}_0^{-1}(\xi,\lambda) = \frac{1}{(\xi^2+\lambda^2)^2(1+2\varepsilon)}\begin{pmatrix}(1+2\varepsilon)\xi^2+\varepsilon\lambda^2 & (1+\varepsilon)\lambda\xi & i\lambda(\xi^2+\lambda^2)\\ (1+\varepsilon)\lambda\xi & (1+2\varepsilon)\lambda^2+\varepsilon\xi^2 & -i\xi(\xi^2+\lambda^2)\\ i\lambda(\xi^2+\lambda^2) & -i\xi(\xi^2+\lambda^2) & 2(\xi^2+\lambda^2)\end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Nous définissons Σ_{ϕ_0} pour $\phi_0 \in]0,\frac{\pi}{2}[$ par

$$\Sigma_{\phi_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \phi_0 \quad \text{ou} \quad |\pi - \arg\lambda| < \phi_0\}.$$

Théorème 4.1 *Pour $\lambda \in \Sigma_{\phi_0}$ avec $|\lambda| \geq \lambda_0$, λ_0 quelconque, et pour tout $\binom{\hat{\underline{f}}}{\hat{h}} \in H^{k-2}(\mathbb{R})^2 \times H^{k-1}(\mathbb{R})$, $k \geq 2$, le système principal (4.21) possède une unique solution $\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} \in H^k(\mathbb{R})^2 \times H^{k-1}(\mathbb{R})$ satisfaisant*

$$|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(\mathbb{R})} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} \leq C\left(|||\hat{\underline{f}}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R})} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})}\right) \tag{4.24}$$

où $C = C(\lambda_0,\phi_0,k)$ est une constante indépendante de $\hat{\underline{f}}$, $\hat{h}$ et λ.

Démonstration : il est facile de vérifier que pour ξ réel et pour $\lambda \in \Sigma_{\phi_0}$, $|\lambda| \geq \lambda_0$, nous avons

$$C(1+|\xi|^2+|\lambda|^2) \leq |\xi^2+\lambda^2| \leq |\xi|^2+|\lambda|^2$$

et donc

$$C(1+|\xi|^{2k}+|\lambda|^{2k}) \leq |\xi^2+\lambda^2|^k \leq \tilde{C}(|\xi|^{2k}+|\lambda|^{2k}) \tag{4.25}$$

pour des constantes C, $\tilde{C}$ dépendantes de λ_0, ϕ_0 mais indépendantes de ξ, λ. En particulier, $\det \hat{L}_0 \neq 0$. Par conséquent, (4.22) admet une solution $\hat{\hat{\underline{u}}}$, $\hat{\hat{p}}$ unique. (4.23) et (4.25) impliquent

$$\begin{aligned}&(1+|\lambda|^{2k}+|\xi|^{2k})|\hat{\hat{\underline{u}}}|^2 + (1+|\lambda|^{2(k-1)}+|\xi|^{2(k-1)})|\hat{\hat{p}}|^2\\ &\leq\ C\big((1+|\lambda|^{2(k-2)}+|\xi|^{2(k-2)})|\hat{\hat{\underline{f}}}|^2 + (1+|\lambda|^{2(k-1)}+|\xi|^{2(k-1)})|\hat{\hat{h}}|^2\big).\end{aligned} \tag{4.26}$$

$\binom{\hat{u}}{\hat{p}} = \hat{\mathcal{F}}^{-1}\binom{\hat{\hat{u}}}{\hat{\hat{p}}}$ est solution unique de (4.21), et intégrant (4.26) sur $\mathbb{R}$ nous obtenons, grâce aux propriétés générales de la transformation de Fourier, l'estimation (4.24). □

Pour établir (4.24) pour le système complet, nous avons besoin du

Lemme 4.1 *Pour $k \geq 2$, $|\lambda| \geq \lambda_0$, $\lambda_0 > 0$ quelconque et $I = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $]0,\omega[$ nous avons*

$$|||[\hat{L}(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix} - \hat{L}_0(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_{1,2}|||^2_{H^{k-2}(I)} + |||[\hat{L}(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix} - \hat{L}_0(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_3|||^2_{H^{k-1}(I)}$$
$$\leq C\{|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^{k-1}(I)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-2}(I)}\}$$

où $C = C(\lambda_0, k)$ est une constante indépendante de λ, $\hat{\underline{u}}$ et $\hat{p}$.
$[\ldots]_{1,2}$, respectivement $[\ldots]_3$ désignent les deux premières composantes, respectivement la troisième d'un vecteur.

Démonstration : puisque

$$(\hat{L} - \hat{L}_0)(D,\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 3iD & -1 \\ -3iD & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nous avons

$$|||[\hat{L}(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix} - \hat{L}_0(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_3|||^2_{H^{k-1}(I)} \leq |||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^{k-1}(I)}$$

et

$$\begin{aligned}
&|||[(\hat{L} - \hat{L}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_{1,2}|||^2_{H^{k-2}(I)} \\
&\leq C\big(|||[(\hat{L} - \hat{L}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_{1,2}||^2_{H^{k-2}(I)} + |\lambda|^{2(k-2)}|||[(\hat{L} - \hat{L}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_{1,2}||^2_{L^2(I)}\big) \\
&\leq \tilde{C}\big(||\hat{\underline{u}}||^2_{H^{k-1}(I)} + |\lambda|^{2(k-2)}||\hat{\underline{u}}||^2_{H^1(I)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-2}(I)}\big) \\
&\leq \tilde{C}\big(|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^{k-1}(I)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-2}(I)}\big)
\end{aligned}$$

et ainsi le lemme est démontré. □

Nous pouvons dès lors montrer :

Théorème 4.2 *Pour $\binom{\hat{f}}{\hat{h}} \in H^{k-2}(\mathbb{R})^2 \times H^{k-1}(\mathbb{R})$, $k \geq 2$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour $|\lambda| > \lambda_0$, $\lambda \in \Sigma_{\phi_0}$, le système complet*

$$\hat{L}(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{\underline{f}}\\ \hat{h}\end{pmatrix} \quad dans \quad I = \mathbb{R} \tag{4.27}$$

possède une unique solution $\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} \in H^k(\mathbb{R})^2 \times H^{k-1}(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(\mathbb{R})} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} \leq C\left(|||\hat{\underline{f}}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R})} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})}\right) \tag{4.28}$$

où $C = C(\lambda_0, \phi_0, k)$ est une constante indépendante de $\hat{\underline{f}}$, $\hat{h}$ et λ.

Démonstration : il est facile de calculer

$$\det \hat{L}(\xi,\lambda) = (1+2\varepsilon)\big(\xi^2 - (1+i\lambda)^2\big)\big(\xi^2 - (1-i\lambda)^2\big).$$

On en déduit que si $\xi \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \Sigma_{\phi_0}$ et $|\lambda| > \lambda_0$ avec λ_0 suffisamment grand, le déterminant ci-dessus ne s'annule pas. Ainsi, argumentant comme dans la démonstration du théorème 4.1, la solution $\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}}$ existe et est unique dans $H^k(\mathbb{R})^2 \times H^{k-1}(\mathbb{R})$. (4.24) implique

$$\begin{aligned}|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(\mathbb{R})} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} \leq C\Big(&|||\hat{\underline{f}}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R})} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} \\ &+|||[(\hat{L}-\hat{L}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_{1,2}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R})} + |||[(\hat{L}-\hat{L}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_3|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})}\Big)\end{aligned}$$

et avec le lemme précédent, nous obtenons

$$|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(\mathbb{R})} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} \leq \tilde{C}\left(|||\hat{\underline{f}}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R})} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} + |||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R})}\right).$$

En utilisant l'équivalence (4.19), nous avons avec λ_0 suffisamment grand

$$\begin{aligned}&|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R})} \\ \leq\ & \frac{C}{\lambda_0^2}\left(|\lambda|^2\|\hat{\underline{u}}\|^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} + |\lambda|^2\|\hat{p}\|^2_{H^{k-2}(\mathbb{R})} + |\lambda|^{2k}\|\hat{\underline{u}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |\lambda|^{2(k-1)}\|\hat{p}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right) \\ \leq\ & \frac{1}{2\tilde{C}}\left(|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(\mathbb{R})} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})}\right)\end{aligned}$$

ce qui conduit à (4.28). □

4.3 Estimation a-priori sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$

Comme au pragraphe précédent, nous commençons par analyser le problème principal

$$\begin{array}{rcll}\hat{L}_0(D,\lambda)\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} &=& \binom{\hat{\underline{f}}}{\hat{h}} & \text{dans} \quad I=\mathbb{R}_+, \\ \hat{B}_0(D,\lambda)\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} &=& \left\{\begin{array}{ll}\hat{\underline{g}}^0 & \text{(Dirichlet) ou} \\ -\hat{\underline{g}}^1 & \text{(Neumann)}\end{array}\right. & \text{pour} \quad \theta=0.\end{array} \tag{4.29}$$

Supposons que nous avons des données homogènes $\hat{\underline{f}} = \underline{0}$, $\hat{h} = 0$. Les solutions du problème sont des combinaisons linéaires des solutions fondamentales. Cherchant des solutions fondamentales de la forme $e^{b\theta}\underline{E}$, nous trouvons que b doit satisfaire

$$\det \hat{L}_0(-ib,\lambda) = (1+2\varepsilon)(\lambda^2-b^2)^2 = 0$$

autrement dit $b = \pm\lambda$ avec multiplicité 2 pour $\lambda \neq 0$. Remarquons que $e^{\pm\lambda\theta}\underline{E}$ n'est pas forcément intégrable sur $I = \mathbb{R}_+$. Comme soit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ soit $\mathrm{Re}(-\lambda) < 0$, nous pouvons supposer $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Alors il est facile de vérifier que

$$\underline{\hat{w}}_1 = e^{\lambda\theta}\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\hat{w}}_2 = e^{\lambda\theta}\begin{pmatrix}(1+3\varepsilon)+(1+\varepsilon)\lambda\theta\\ i(1+\varepsilon)\lambda\theta\\ 2i\lambda\end{pmatrix}$$

sont des solutions fondamentales stables. Ainsi la solution du problème homogène peut s'écrire

$$\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix} = c_1\underline{\hat{w}}_1 + c_2\underline{\hat{w}}_2$$

où les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions au bord.

Pour la *condition de Dirichlet* $\underline{\hat{u}}\,|_{\theta=0}= \underline{\hat{g}}^0 = \binom{\hat{g}_t^0}{\hat{g}_\theta^0}$, nous avons

$$c_1 = -i\hat{g}_\theta^0, \quad c_2 = \frac{1}{1+3\varepsilon}(\hat{g}_t^0 + i\hat{g}_\theta^0)$$

ce qui implique

$$\left|\frac{d^l\underline{\hat{u}}}{d\theta^l}\right|^2 \leq Ce^{2\theta\mathrm{Re}(\lambda)}|\lambda|^{2l}(1+\theta^2|\lambda|^2)|\underline{\hat{g}}^0|^2, \quad l \geq 0$$

et

$$\left|\frac{d^l\hat{p}}{d\theta^l}\right|^2 \leq Ce^{2\theta\mathrm{Re}(\lambda)}|\lambda|^{2(l+1)}|\underline{\hat{g}}^0|^2, \quad l \geq 0.$$

Remarquons que pour $\lambda \in \Sigma_{\phi_0}$, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ et $|\lambda| \geq \lambda_0 > 0$

$$\int_0^\infty \theta^m e^{2\theta\mathrm{Re}(\lambda)}\, d\theta \leq C_m|\lambda|^{-(m+1)}, \quad m \geq 1,$$

ce qui conduit à

$$\int_0^\infty \Big\{\sum_{l=0}^{k}\left|\frac{d^l\underline{\hat{u}}}{d\theta^l}\right|^2|\lambda|^{2(k-l)} + \sum_{l=0}^{k-1}\left|\frac{d^l\hat{p}}{d\theta^l}\right|^2|\lambda|^{2(k-l-1)}\Big\}\, d\theta \leq C|\lambda|^{2k-1}|\underline{\hat{g}}^0|^2.$$

et donc

$$|||\underline{\hat{u}}|||^2_{H^k(\mathbf{R}_+)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(\mathbf{R}_+)} \leq C|\lambda|^{2k-1}|\underline{\hat{g}}^0|^2. \tag{4.30}$$

Pour la *condition de Neumann* $-\hat{B}_0(D,\lambda)\binom{\underline{\hat{u}}}{\hat{p}}|_{\theta=0} = \underline{\hat{g}}^1 = \binom{\hat{g}_t^1}{\hat{g}_0^1}$, nous avons

$$c_1 = -\frac{1}{2\lambda(1+\varepsilon)}(\varepsilon\hat{g}_t^1 + i(1+2\varepsilon)\hat{g}_\theta^1), \quad c_2 = \frac{1}{2\lambda(1+\varepsilon)}(\hat{g}_t^1 + i\hat{g}_\theta^1)$$

ce qui implique

$$\left|\frac{d^l\underline{\hat{u}}}{d\theta^l}\right|^2 \leq Ce^{2\theta\mathrm{Re}(\lambda)}|\lambda|^{2(l-1)}(1+\theta^2|\lambda|^2)|\underline{\hat{g}}^1|^2, \quad l \geq 0$$

et

$$\left|\frac{d^l\hat{p}}{d\theta^l}\right|^2 \leq Ce^{2\theta\mathrm{Re}(\lambda)}|\lambda|^{2l}|\underline{\hat{g}}^1|^2, \quad l \geq 0.$$

Ainsi, nous obtenons

$$|||\underline{\hat{u}}|||^2_{H^k(\mathbf{R}_+)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(\mathbf{R}_+)} \leq C|\lambda|^{2k-3}|\underline{\hat{g}}^1|^2. \tag{4.31}$$

Théorème 4.3 *Si $\lambda \in \Sigma_{\phi_0}$ avec $|\lambda| \geq \lambda_0 > 0$ suffisamment grand, le problème principal (4.29) possède pour $\binom{\underline{\hat{f}}}{\hat{h}} \in H^{k-2}(\mathbb{R})^2 \times H^{k-1}(\mathbb{R})$, $k \geq 2$, et pour toutes données initiales $\underline{\hat{g}}^l \in \mathbb{C}^2$, $l = 0$ ou 1, une unique solution $\binom{\underline{\hat{u}}}{\hat{p}} \in H^k(\mathbb{R})^2 \times H^{k-1}(\mathbb{R})$ satisfaisant*

$$|||\underline{\hat{u}}|||^2_{H^k(\mathbf{R}_+)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(\mathbf{R}_+)} \leq C\left(|||\underline{\hat{f}}|||^2_{H^{k-2}(\mathbf{R}_+)} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(\mathbf{R}_+)} + |\lambda|^{2k-1-2l}|\underline{\hat{g}}^l|^2\right) \tag{4.32}$$

où $C = C(\lambda_0, \phi_0, k)$ est une constante indépendante de $\underline{\hat{f}}$, $\hat{h}$, $\underline{\hat{g}}^l$ et λ.

Démonstration : 1) Pour $\underline{\hat{f}} = \underline{0}$, $\hat{h} = 0$, nous avons précédemment construit la solution et les inéquations (4.30), (4.31) correspondent à (4.32).
2) Dans le cas général, nous pouvons (voir [10]) prolonger $\underline{\hat{f}}$ et $\hat{h}$ sur l'ensemble des nombres réels de sorte que

$$|||\underline{\hat{f}}|||_{H^{k-2}(\mathbf{R})} \leq C|||\underline{\hat{f}}|||_{H^{k-2}(\mathbf{R}_+)}, \quad |||\hat{h}|||_{H^{k-1}(\mathbf{R})} \leq C|||\hat{h}|||_{H^{k-1}(\mathbf{R}_+)}.$$

Le théorème 4.1 nous dit qu'il existe une solution $\binom{\hat{u}_0}{\hat{p}_0} \in H^k(\mathbb{R})^2 \times H^{k-1}(\mathbb{R})$ satisfaisant l'estimation a-priori (4.24).
Nous posons $\underline{\hat{v}} = \underline{\hat{u}} - \underline{\hat{u}}_0$, $\hat{q} = \hat{p} - \hat{p}_0$. Alors

$$\begin{aligned} \hat{L}_0(D,\lambda)\binom{\hat{v}}{\hat{q}} &= 0 && \text{dans} \quad I = \mathbb{R}_+, \\ \hat{B}_0(D,\lambda)\binom{\hat{v}}{\hat{q}} &= \begin{cases} \underline{\hat{g}}^0 - \hat{B}_0(D,\lambda)\binom{\hat{u}_0}{\hat{p}_0} & \text{(Dirichlet)} \\ -\underline{\hat{g}}^1 - \hat{B}_0(D,\lambda)\binom{\hat{u}_0}{\hat{p}_0} & \text{(Neumann)} \end{cases} && \text{en} \quad \theta = 0. \end{aligned}$$

D'après 1), nous avons

$$|||\underline{\hat{v}}|||^2_{H^k(\mathbb{R}_+)} + |||\hat{q}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)} \leq C \begin{cases} |\lambda|^{2k-1} \left|\underline{\hat{g}}^0 - \hat{B}_0(D,\lambda)\binom{\hat{u}_0}{\hat{p}_0}\right|^2 & \text{(Dirichlet)} \\ |\lambda|^{2k-3} \left| -\underline{\hat{g}}^1 - \hat{B}_0(D,\lambda)\binom{\hat{u}_0}{\hat{p}_0}\right|^2 & \text{(Neumann)} \end{cases} \tag{4.33}$$

Par le lemme 4.2 qui suit cette démonstration, nous avons

$$\begin{aligned} |\lambda|^{2k-1}|\underline{\hat{u}}_0(0)|^2 &\leq C\big(|\lambda|^{2k}\|\underline{\hat{u}}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |\lambda|^{2(k-1)}\|\underline{\hat{u}}_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\big) \\ &\leq C|||\underline{\hat{u}}_0|||^2_{H^k(\mathbb{R})} \\ &\leq C\big(|||\underline{\hat{f}}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R}_+)} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)}\big) \end{aligned} \tag{4.34}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} |\lambda|^{2k-3}|\underline{\hat{u}}_0'(0)|^2 &\leq C\big(|\lambda|^{2(k-1)}\|\underline{\hat{u}}_0'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |\lambda|^{2(k-2)}\|\underline{\hat{u}}_0'\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\big) \\ &\leq C|||\underline{\hat{u}}_0|||^2_{H^k(\mathbb{R})} \\ &\leq C\big(|||\underline{\hat{f}}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R}_+)} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)}\big) \end{aligned} \tag{4.35}$$

et

$$\begin{aligned} |\lambda|^{2k-3}|\hat{p}_0(0)|^2 &\leq C\big(|\lambda|^{2(k-1)}\|\hat{p}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |\lambda|^{2(k-2)}\|\hat{p}_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\big) \\ &\leq C|||\hat{p}_0|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} \\ &\leq C\big(|||\underline{\hat{f}}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R}_+)} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)}\big). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Les estimations (4.33-4.36) impliquent directement (4.32). □

Il reste à prouver :

Lemme 4.2 *Pour toute fonction $v \in H^1(I)$ avec $I = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ ou $]0,\omega[$, et pour $|\lambda| > \lambda_0 > 0$,*

$$|\lambda||v(0)|^2 \leq C\big(\|v\|^2_{H^1(1)} + |\lambda|^2\|v\|^2_{L^2(I)}\big) = C|||v|||^2_{H^1(I)}$$

avec $C = C(\lambda_0)$ indépendante de λ et v.

Démonstration : Puisque $v \in H^1(I)$, v est continue, et

$$(v(0))^2 = (v(x))^2 + \int_0^x 2v'(t)v(t)\,dt \leq (v(x))^2 + \int_0^x \Big(\frac{|v'(t)|^2}{|\lambda|} + |\lambda||v(t)|^2\Big)\,dt$$

où nous avons utilisé l'inégalité bien connue $2ab \leq \frac{a^2}{k} + kb^2$ pour tout $k > 0$.
Si $I = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, on choisit $x \to \infty$ ($\Rightarrow v(x) \to 0$) et si $I =]0,\omega[$, on choisit $x = \arg\min_{t\in\bar{I}} |v(t)|$ ($\Rightarrow |v(x)|^2 \leq \frac{1}{\omega}\int_I |v(t)|^2\,dt$), et ainsi

$$\begin{aligned} |\lambda||v(0)|^2 &\leq C\Big(|\lambda|\int_I |v(t)|^2\,dt + \int_I (|v'(t)|^2 + |\lambda|^2|v(t)|^2)\,dt\Big) \\ &\leq \tilde{C}\big(\|v\|^2_{H^1(1)} + |\lambda|^2\|v\|^2_{L^2(I)}\big). \quad \square \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant aborder le système complet

$$\begin{array}{rcll} \hat{L}(D,\lambda)\binom{\hat{u}}{\hat{p}} & = & \binom{\hat{f}}{\hat{h}} & \text{dans} \quad I=\mathbb{R}_+, \\ \hat{B}(D,\lambda)\binom{\hat{u}}{\hat{p}} & = & \left\{ \begin{array}{ll} \hat{\underline{g}}^0 & \text{(Dirichlet) ou} \\ -\hat{\underline{g}}^1 & \text{(Neumann)} \end{array} \right. & \text{pour} \quad \theta=0. \end{array} \tag{4.37}$$

Théorème 4.4 *Si $\lambda \in \Sigma_{\phi_0}$ avec $|\lambda| \geq \lambda_0 > 0$ suffisamment grand, le système complet (4.37) possède pour $\binom{\hat{f}}{\hat{h}} \in H^{k-2}(\mathbb{R}_+)^2 \times H^{k-1}(\mathbb{R}_+)$, $k \geq 2$, et pour toutes données initiales $\hat{\underline{g}}^l \in \mathbb{C}^2$, $l=0$ ou 1, une unique solution $\binom{\hat{u}}{\hat{p}} \in H^k(\mathbb{R}_+)^2 \times H^{k-1}(\mathbb{R}_+)$ satisfaisant*

$$|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(\mathbb{R}_+)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)} \leq C\left(|||\hat{\underline{f}}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R}_+)} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)} + |\lambda|^{2k-1-2l}|\hat{\underline{g}}^l|^2\right) \tag{4.38}$$

où $C = C(\lambda_0, \phi_0, k)$ est une constante indépendante de $\hat{\underline{f}}$, $\hat{h}$, $\hat{\underline{g}}^l$ et λ.

Démonstration : La solution de (4.37) se construit exactement comme celle du système principal (4.29).

Pour démontrer l'estimation (4.38), il suffit de montrer que pour $C > 0$ il existe λ_0 tel que

$$\begin{aligned} &|||[(\hat{L}-\hat{L}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_{1,2}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R}_+)} + |||[(\hat{L}-\hat{L}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_3|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)} \\ &\qquad + |\lambda|^{2k-1-2l}|(\hat{B}-\hat{B}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}|^2 \\ &\qquad \leq \frac{1}{2C}\left(|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(\mathbb{R}_+)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)}\right) \end{aligned}$$

Par le lemme (4.1),

$$\begin{aligned} &|||[(\hat{L}-\hat{L}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_{1,2}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R}_+)} + |||[(\hat{L}-\hat{L}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_3|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)} \\ &\qquad \leq C\left(|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R}_+)}\right) \end{aligned}$$

Notons ensuite que

$$\begin{array}{ll} |(\hat{B}-\hat{B}_0)(D,\lambda)\binom{\hat{u}}{\hat{p}}|^2 = 0 & \text{pour la condition de Dirichlet } (l=0) \\ |(\hat{B}-\hat{B}_0)(D,\lambda)\binom{\hat{u}}{\hat{p}}|^2 \leq C|\hat{\underline{u}}(0)|^2 & \text{pour la condition de Neumann } (l=1) \end{array}$$

Par le lemme (4.2),

$$\begin{aligned} |\lambda|^{2k-3}|(\hat{B}-\hat{B}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}|^2 &\leq C|\lambda|^{2(k-2)}\left(|\lambda|^2\|\hat{\underline{u}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|\hat{\underline{u}}\|^2_{H^1(\mathbb{R}_+)}\right) \\ &\leq C|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)} \end{aligned}$$

dans le cas de la condition de Neumann.

Ainsi nous avons, pour λ_0 suffisamment grand, comme dans la démonstration du théorème 4.2,

$$\begin{aligned} &|||[(\hat{L}-\hat{L}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_{1,2}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R}_+)} + |||[(\hat{L}-\hat{L}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}]_3|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)} \\ &\qquad + |\lambda|^{2k-1-2l}|(\hat{B}-\hat{B}_0)(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}|^2 \\ &\qquad \overset{\text{(Lemme 4.1)}}{\leq} \tilde{C}\left(|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-2}(\mathbb{R}_+)}\right) \\ &\qquad \leq \frac{1}{2C}\left(|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(\mathbb{R}_+)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}_+)}\right) \end{aligned}$$

et le théorème est démontré. □

4.4 Estimation a-priori dans l'intervalle $]0,\omega[$

Nous pouvons maintenant prouver l'estimation (4.38) dans l'intervalle $I =]0,\omega[$ en utilisant les résultats des deux paragraphes précédant.

Théorème 4.5 *Si $\lambda \in \Sigma_{\phi_0}$ avec $|\lambda| \geq \lambda_0 > 0$ suffisamment grand, le système*

$$\begin{array}{rcll} \hat{L}(D,\lambda)\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} & = & \binom{\hat{\underline{f}}}{\hat{h}} & \textit{dans} \quad I =]0,\omega[, \\ \hat{B}(D,\lambda)\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} & = & \left\{ \begin{array}{c} \hat{\underline{g}}^0 \\ \pm\hat{\underline{g}}^1 \end{array} \right. & \textit{sur} \quad \partial I = \{0,\omega\} \end{array} \tag{4.39}$$

possède pour $\binom{\hat{\underline{f}}}{\hat{h}} \in H^{k-2}(I)^2 \times H^{k-1}(I)$, $k \geq 2$, et pour toutes données initiales $\hat{\underline{g}}^l \in \mathbb{C}^2$, $l = 0,1$, une unique solution $\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} \in H^k(I)^2 \times H^{k-1}(I)$ satisfaisant

$$|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(I)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(I)} \leq C\left(|||\hat{\underline{f}}|||^2_{H^{k-2}(I)} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(I)} + \sum_{l=1}^{2} |\lambda|^{2k-1-2l} |\hat{\underline{g}}^l|^2 \right) \tag{4.40}$$

où $C = C(\lambda_0, \phi_0, k)$ est une constante indépendante de $\hat{\underline{f}}$, $\hat{h}$, $\hat{\underline{g}}^l$, $l = 0,1$ et λ.

Démonstration : Nous traitons le cas des conditions au bord de type mixte ; les types Dirichlet et Neumann sont tout-à-fait analogues.

Nous pouvons montrer l'existence de la même manière que dans les paragraphes précédant ; il reste à prouver l'estimation a priori (4.40). Soit $\{I_i\}_{i=1}^n$ un recouvrement de $\overline{I} = [0,\omega]$ tel que $I_i \subset I, i = 2,\ldots,n-1$ et $0 \in I_1, \omega \in I_n$, et soit $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ une partition de l'unité subordonnée à I : $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1 \ \forall x \in \overline{I}$. Soit encore $\hat{\underline{u}}_i := \varphi_i \hat{\underline{u}}$, $\hat{p}_i := \varphi_i \hat{p}$, $,\hat{\underline{f}}_i := \varphi_i \hat{\underline{f}}$, $\hat{h}_i := \varphi_i \hat{h}$, $i = 1,\ldots,n-1$ et $\hat{\underline{g}}_i^l := 0$, $l = 1,2$ pour $i = 2,\ldots,n-1$, $\hat{\underline{g}}_i^l := \hat{\underline{g}}^l$, $l = 1,2$ pour $i = 1,n$. Nous avons alors

$$\begin{array}{rcll} \hat{L}(D,\lambda)\binom{\hat{\underline{u}}_i}{\hat{p}_i} + \hat{L}_i(D,\lambda)\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} & = & \binom{\hat{\underline{f}}_i}{\hat{h}_i} & \text{dans} \quad I, \\ \hat{B}(D,\lambda)\binom{\hat{\underline{u}}_i}{\hat{p}_i} + \hat{B}_i(D,\lambda)\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} & = & \left\{ \begin{array}{c} \hat{\underline{g}}_i^0 \\ \pm\hat{\underline{g}}_i^1 \end{array} \right. & \text{sur} \quad \partial I = \{0,\omega\} \end{array} \tag{4.41}$$

où $\hat{L}_i(D,\lambda)$ sont des opérateurs différentiels d'un degré inférieur à $\hat{L}$ vérifiant

$$|||[\hat{L}_i(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}} \\ \hat{p}\end{pmatrix}]_{1,2}|||^2_{H^{k-2}(I)} + |||[\hat{L}_i(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}} \\ \hat{p}\end{pmatrix}]_3|||^2_{H^{k-1}(I)} \leq C\big(|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^{k-1}(I)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-2}(I)}\big), \tag{4.42}$$

$\hat{B}_i(D,\lambda) \equiv 0$ en $\theta = 0$ (Dirichlet,) et $\hat{B}_i(D,\lambda)$ en $\theta = \omega$ (Neumann) sont des opérateurs au bord d'un degré inférieur à $\hat{B}(D,\lambda)$ vérifiant

$$\begin{array}{rcl} |\lambda|^{2k-3}|\hat{B}_i(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}} \\ \hat{p}\end{pmatrix}|^2 & \leq & C|\lambda|^{2k-3}|\hat{\underline{u}}(\omega)|^2 \\ & \overset{\text{(lemme 4.2)}}{\leq} & \tilde{C}|\lambda|^{2(k-2)}|\big(\|\hat{\underline{u}}\|^2_{H^1(I)} + |\lambda|^2\|\hat{\underline{u}}\|_{L^2(I)}\big) \\ & \leq & \tilde{C}|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^{k-1}(I)}. \end{array} \tag{4.43}$$

Pour $i = 2,\ldots,n-1$, le système (4.41) peut être étendu sur tout $\mathbb{R}$, et pour $i = 1,n$ sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$. D'après les théorèmes 4.2 et 4.4, $\binom{\hat{\underline{u}}_i}{\hat{p}_i}$ sont les uniques solution de ces problèmes étendus et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que

$$\begin{array}{rcl} |||\hat{\underline{u}}_i|||^2_{H^k(I)} + |||\hat{p}_i|||^2_{H^{k-1}(I)} & \leq & C\Big\{ |||\hat{\underline{f}}_i|||^2_{H^{k-2}(I)} + |||\hat{h}_i|||^2_{H^{k-1}(I)} \\ & & +|||[\hat{L}_i(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}} \\ \hat{p}\end{pmatrix}]_{1,2}|||^2_{H^{k-2}(I)} + |||[\hat{L}_i(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}} \\ \hat{p}\end{pmatrix}]_3|||^2_{H^{k-1}(I)} \\ & & +|\lambda|^{2k-1}|\hat{\underline{g}}_i^0|^2 + |\lambda|^{2k-3}\big(|\hat{\underline{g}}_i^1|^2 + |\hat{B}_i(D,\lambda)\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}} \\ \hat{p}\end{pmatrix}|^2\big)\Big\} \end{array}$$

Comme précédemment, pour tout $C > 0$ il existe λ_0 tel que

$$|||\underline{\hat{u}}|||^2_{H^{k-1}(I)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-2}(I)} \leq \frac{1}{2C}\left(|||\underline{\hat{u}}|||^2_{H^k(I)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(I)}\right). \tag{4.44}$$

Finalement, (4.42), (4.43) et (4.44) impliquent

$$\begin{aligned} |||\underline{\hat{u}}|||^2_{H^k(I)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(I)} &\leq C\sum_{i=1}^{n}\left(|||\underline{\hat{u}}_i|||^2_{H^k(I)} + |||\hat{p}_i|||^2_{H^{k-1}(I)}\right) \\ &\leq C\left(|||\underline{\hat{f}}|||^2_{H^{k-2}(I)} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(I)} + \sum_{l=1}^{2}|\lambda|^{2k-1-2l}|\underline{\hat{g}}^l|^2\right), \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. □

Le théorème 4.5 est vrai seulement pour $|\lambda|$ suffisamment grand ; il nous reste donc à examiner le cas $|\lambda| < \lambda_0$.

4.5 Estimation a-priori pour λ borné

Désignons par $\mathcal{U}(\lambda) := [\hat{L}(D,\lambda), \hat{B}(D,\lambda)]$ l'opérateur (4.17) défini à la page 10, dépendant de manière polynomiale du paramètre λ.

$$\mathcal{U}(\lambda) : H^k(I)^2 \times H^{k-1}(I) \to H^{k-2}(I)^2 \times H^{k-1}(I) \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$$

est un isomorphisme pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ sauf pour certain points isolés. Par conséquent, la résolvante $\mathcal{R}(\lambda) := \mathcal{U}(\lambda)^{-1}$ est une fonction méromorphe en λ avec des pôles de multiplicité finie. Les pôles sont les valeurs propres de $\mathcal{U}$, i.e sont tels que l'équation homogène

$$\mathcal{U}(\lambda)\begin{pmatrix}\underline{\hat{v}} \\ \hat{q}\end{pmatrix} = \underline{0}$$

admette au moins une solution non triviale. D'après [3] (Lemma 4.1), nous avons le résultat suivant pour les pôles de $\mathcal{R}$:

Lemme 4.3 *Soit $\lambda = iz$ une valeur propre de $\mathcal{U}$. Alors*
- *pour le problème de Dirichlet, $z \neq 0$ et z est solution de*

$$\sin^2(z\omega) = \left(\frac{1+\varepsilon}{1+3\varepsilon}z\right)^2 \sin^2\omega, \tag{4.45}$$

- *pour le problème de Neumann, z est solution de*

$$\sin^2(z\omega) = z^2\sin^2\omega, \tag{4.46}$$

et $\lambda = 0$ est une valeur propre de multiplicité 2, la seule sur l'axe réel,
- *pour le problème de type mixte, z est solution de*

$$\sin^2(z\omega) = \frac{(1+2\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)(1+3\varepsilon)} - \frac{1+\varepsilon}{1+3\varepsilon}z^2\sin^2\omega. \tag{4.47}$$

Nous voyons que les pôles de la résolvante sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire et également par rapport à l'axe réel. Nous désignerons par κ_1 la plus petite partie imaginaire des pôles non nuls à partie imaginaire positive (ou, de manière équivalente, la plus petite partie *réelle* des solutions z de (4.45),(4.46) ou (4.47)) et par $\mathcal{J}_h$ la bande $\{\lambda \in \mathbb{C} : -h < \mathrm{Im}(\lambda) < h\}$ avec $0 < h < \kappa_1$. Ainsi, $\mathcal{R}(\lambda)$ n'a pas de pôles dans $\mathcal{J}_h$ pour les problèmes de Dirichlet et de type mixte, et 0 est le seul pôle de $\mathcal{R}(\lambda)$ dans $\mathcal{J}_h$ pour le problème de Neumann.

Théorème 4.6 *Soit $\mathcal{L}_h := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\lambda) = h\}$. Si $\mathcal{R}(\lambda)$ n'a pas de pôles sur la droite $\mathcal{L}_h$, le système (4.17) possède pour $\lambda \in \mathcal{L}_h$, $\binom{\hat{\underline{f}}}{\hat{h}} \in H^{k-2}(I)^2 \times H^{k-1}(I)$, $k \geq 2$, et pour toutes données initiales $\hat{\underline{g}}^l \in \mathbb{C}^2$, $l = 0, 1$, une unique solution $\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} \in H^k(I)^2 \times H^{k-1}(I)$ satisfaisant*

$$|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(I)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(I)} \leq C\left(|||\hat{\underline{f}}|||^2_{H^{k-2}(I)} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(I)} + \sum_{l=1}^{2} |\lambda|^{2k-1-2l} |\hat{\underline{g}}^l|^2\right) \tag{4.48}$$

où $C = C(h, k)$ est une constante indépendante de $\hat{\underline{f}}$, $\hat{h}$ et λ.

Démonstration : Comme la droite $\mathcal{L}_h$ ne contient pas de pôles, et d'après les hypothèses sur les données, la solution $\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} \in H^k(I)^2 \times H^{k-1}(I)$ existe $\forall \lambda \in \mathcal{L}_h$. Par le théorème 4.5, il existe λ_0 tel que pour $\lambda \in \mathcal{L}_h$, $|\lambda| \geq \lambda_0$, (4.48) est vraie.
Si $|\lambda| < \lambda_0$, $\mathcal{R}(\lambda)$ est borné :

$$\|\hat{\underline{u}}\|^2_{H^k(I)} + \|\hat{p}\|^2_{H^{k-1}(I)} \leq C\big(\|\hat{\underline{f}}\|^2_{H^{k-2}(I)} + \|\hat{h}\|^2_{H^{k-1}(I)} + \sum_{l=1}^{2} |\lambda|^{2k-1-2l} |\hat{\underline{g}}^l|^2\big)$$

et pour $\lambda \in \mathcal{L}_h$, $|\lambda| < \lambda_0$,

$$\begin{aligned} |\lambda|^{2k} \|\hat{\underline{u}}\|^2_{L^2(I)} + |\lambda|^{2(k-1)} \|\hat{p}\|^2_{L^2(I)} \quad &\leq \quad \tilde{C}\Big(|\lambda|^{2(k-2)} \|\hat{\underline{f}}\|^2_{L^2(I)} + |\lambda|^{2(k-1)} \|\hat{h}\|^2_{L^2(I)} \\ &\quad + \|\hat{h}\|^2_{H^{k-1}(I)} + \sum_{l=1}^{2} |\lambda|^{2k-1-2l} |\hat{\underline{g}}^l|^2\Big) \end{aligned}$$

En combinant ces deux dernières inégalités, nous obtenons (4.48), ce qui achève la démonstration. □

4.6 Régularité dans un secteur infini

Nous allons maintenant prouver la régularité de la solution dans dans des espaces de Kondratev $W^k_\beta(Q)$ sur le secteur infini $Q = \{(r, \theta) : 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < \omega\}$, introduits dans la section 2. Nous utiliserons encore dans la bande $D = \{(\tau, \theta) : \tau \in \mathbb{R},\ 0 < \theta < \omega\}$ les espaces $H^k_h(D)$ également définis dans la section 2.

Lemme 4.4 *Si $v(r, \theta) \in W^k_\beta(Q), k \in \mathbb{N}$, alors $\tilde{v}(t, \theta) := v(e^{-t}, \theta) \in H^k_h(D)$ avec $h = k - 1 - \beta$ et*

$$C\|\tilde{v}\|_{H^k_h(D)} \leq \|v\|_{W^k_\beta(Q)} \leq \tilde{C}\|\tilde{v}\|_{H^k_h(D)}. \tag{4.50}$$

En particulier, pour $l = 0, 1, \tilde{v}_l(t, \theta) := e^{(l-2)} v(e^{-t}, \theta) \in H^k_h(D)$ avec $h = k + 1 - l - \beta$ et

$$C\|\tilde{v}_l\|_{H^k_h(D)} \leq \|v\|_{W^k_\beta(Q)} \leq \tilde{C}\|\tilde{v}_l\|_{H^k_h(D)}. \tag{4.51}$$

$C, \tilde{C}$ sont des constantes indépendantes de $v, \tilde{v}$.

Démonstration : Nous montrons d'abord la première inégalité de (4.50) ; il suffit de montrer que

$$\|e^{ht} D^\alpha \tilde{v}\|^2_{L^2(D)} \leq C\|v\|^2_{W^k_\beta(Q)} \tag{4.52}$$

pour $|\alpha| \leq k$. Pour $n \leq k$,

$$\begin{aligned} \int_D e^{2ht} \left|\frac{\partial^n \tilde{v}}{\partial \theta^n}(t, \theta)\right|^2 dt\, d\theta \quad &= \quad \int_Q r^{-2(h+1)} \left|\frac{\partial^n v}{\partial \theta^n}(r, \theta)\right|^2 r\, dr\, d\theta \\ &= \quad \int_Q r^{2(\beta-k)} \left|\frac{\partial^n v}{\partial \theta^n}(r, \theta)\right|^2 r\, dr\, d\theta \\ &\leq \quad \|v\|^2_{W^k_\beta(Q)}. \end{aligned}$$

Pour $n \leq k-1$,

$$\begin{aligned}\int_D e^{2ht}\left|\frac{\partial^{n+1}\tilde{v}}{\partial t\partial\theta^n}(t,\theta)\right|^2 dt\,d\theta &= \int_Q r^{-2h}\left|\frac{\partial^{n+1}v}{\partial r\partial\theta^n}(r,\theta)\right|^2\left|\frac{dr}{dt}\right|^2\frac{1}{r^2}r\,dr\,d\theta\\ &= \int_Q r^{2(\beta+1-k)}\left|\frac{\partial^{n+1}v}{\partial r\partial\theta^n}(r,\theta)\right|^2 r\,dr\,d\theta\\ &\leq \|v\|^2_{W^k_\beta(Q)}.\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons (4.52) pour $\alpha_1 = 0,1$. Pour $\alpha_1 \geq 2$, remarquant que

$$\left|\frac{\partial^n\tilde{v}}{\partial t^n}(t,\theta)\right|^2 \leq C\sum_{m\leq n}\left|\frac{\partial^m\tilde{v}}{\partial t^m}(t,\theta)\right|^2 r^{2m},$$

on obtient de la même manière que plus haut (4.52). La deuxième inégalité de (4.50) se démontre de façon analogue ; enfin, (4.51) est une conséquence directe de (4.50). □

Lemme 4.5 *Soit* $\tilde{v} \in H^k_h(D)$, $k \in \mathbb{N}$, $\hat{v}(\lambda,\cdot) = \mathcal{F}(\tilde{v})$, $I =]0,\omega[$. *Alors*

$$\|\tilde{v}\|^2_{H^k_h(D)} = \int_{-\infty+ih}^{\infty+ih} |||\hat{v}|||^2_{H^k(I)}\,d\lambda. \tag{4.53}$$

Démonstration : pour $0 \leq n \leq k$, $0 \leq m \leq n$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_D e^{2ht}\left|\frac{\partial\tilde{v}^n}{\partial t^m\partial\theta^{n-m}}\right|^2 dt\,d\theta &= \int_0^\omega\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}(e^{ht}\frac{\partial\tilde{v}^n}{\partial t^m\partial\theta^{n-m}})(\lambda)\right|^2 d\lambda\,d\theta\\ &= \int_0^\omega\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda+ih|^{2m}\left|\frac{d\hat{v}^{n-m}}{d\theta^{n-m}}(\lambda+ih,\theta)\right|^2 d\lambda\,d\theta\\ &= \int_{-\infty+ih}^{\infty+ih}|\lambda|^{2m}|\hat{v}(\lambda,\cdot)|^2_{H^{n-m}(I)}\,d\lambda\end{aligned}$$

où $|\hat{v}(\lambda,\cdot)|^2_{H^{n-m}(I)} = \int_0^\omega\left|\frac{d\hat{v}^{n-m}}{d\theta^{n-m}}\right|^2 d\theta$. En sommant l'équation ci-dessus sur $n = 0\ldots k$, $m = 0\ldots n$, et remarquant que $\|\hat{v}(\lambda,\cdot)\|^2_{H^{k-m}(I)} = \sum_{i=1}^{k-m}|\hat{v}(\lambda,\cdot)|^2_{H^i(I)}$, nous obtenons directement (4.53). □

Lemme 4.6 *Soit* $\overline{\underline{G}}^l(r,\theta) \in W^{k-l}_\beta(Q)^2$, $k \geq 2$, $\tilde{\underline{G}}^l(t,\theta) = e^{-lt}\overline{\underline{G}}^l(e^{-t},\theta)$, $\hat{\underline{G}}^l(\lambda,\cdot) = \mathcal{F}(\tilde{\underline{G}})$, $l = 0,1$. *Alors*

$$\int_{-\infty+ih}^{\infty+ih}|\lambda|^{2(k-l-\frac{1}{2})}|\hat{\underline{G}}^l(\lambda,0)|^2\,d\lambda \leq C\int_{-\infty+ih}^{\infty+ih}|||\hat{\underline{G}}^l(\lambda,\cdot)|||^2_{H^{k-l}(I)}\,d\lambda,\ l = 0,1, \tag{4.54}$$

où $h = k-1-\beta$.

Démonstration : par les deux lemmes précédents, $|||\hat{\underline{G}}^l(\lambda,\cdot)|||^2_{H^{k-l}(I)}$ est intégrable sur $\mathcal{L}_h = \{\lambda : \mathrm{Im}(\lambda) = h\}$, donc en particulier $\hat{\underline{G}}^l(\lambda,\cdot) \in H^1(I)$ pour presque chaque $\lambda \in \mathcal{L}_h$. Nous pouvons donc appliquer le lemme 4.2 :

$$|\lambda|^{2k-3}|\hat{\underline{G}}^1(\lambda,0)|^2 \leq C|\lambda|^{2(k-2)}|||\hat{\underline{G}}^1(\lambda,\cdot)|||^2_{H^1(I)} \leq C|||\hat{\underline{G}}^1(\lambda,\cdot)|||^2_{H^{k-1}(I)}$$

et

$$|\lambda|^{2k-1}|\hat{\underline{G}}^1(\lambda,0)|^2 \le C|\lambda|^{2(k-1)}|||\hat{\underline{G}}^0(\lambda,\cdot)|||^2_{H^1(I)} \le C|||\hat{\underline{G}}^0(\lambda,\cdot)|||^2_{H^k(I)}$$

pour presque chaque $\lambda \in \mathcal{L}_h$. En intégrant sur $\mathcal{L}_h$ par rapport à λ, nous arrivons à (4.54). □

Le théorème suivant donne la régularité de la solution en coordonnées polaires dans les espaces $W^l_\beta(Q)$. Nous désignons ici pour Q le bord de Dirichlet, resp. de Neumann par Γ^0, resp. Γ^1, i.e. nous avons soit $\Gamma^0 = \partial Q$, soit $\Gamma^1 = \partial Q$ ou bien $\Gamma^0 = \{(r,\theta) : \theta = 0\}$, $\Gamma^1 = \{(r,\theta) : \theta = \omega\}$.

Théorème 4.7 *Soit $\overline{\underline{f}} \in W^{k-2}_\beta(Q)^2$, $\overline{h} \in W^{k-1}_\beta(Q)^2$, $\overline{\underline{g}}^l \in W^{k-l-\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^l)^2$, $l = 0,1$, $k \ge 2$. Si $\mathcal{R}(\lambda)$ n'a pas de pôles sur la droite $\mathcal{L}_h = \{\lambda : \mathrm{Im}(\lambda) = h\}$ avec $h = k-1-\beta$, alors le problème en coordonnées polaires (4.5) avec une des trois conditions au bord (4.6), (4.7) ou (4.8) possède une unique solution $\binom{\overline{\underline{u}}}{\overline{p}} \in W^k_\beta(Q)^2 \times W^{k-1}_\beta(Q)$ et*

$$\|\overline{\underline{u}}\|_{W^k_\beta(Q)} + \|\overline{p}\|_{W^{k-1}_\beta(Q)} \le C\Big(\|\overline{\underline{f}}\|_{W^{k-2}_\beta(Q)} + \|\overline{h}\|_{W^{k-1}_\beta(Q)} + \sum_{l=0,1}\|\overline{\underline{g}}^l\|_{W^{k-l-\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^l)}\Big), \tag{4.55}$$

où $C = C(\beta,k)$ est une constante indépendante de $\overline{\underline{f}}$, $\overline{h}$, $\overline{\underline{g}}^l$, $l = 0,1$.

Démonstration : Par définition de $W^{k-l-\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^l)$, il existe $\overline{\underline{G}}^l \in W^{k-l}_\beta(Q)^2$, $l = 0,1$, tel que $\overline{\underline{G}}^l|_{\Gamma^l} = \overline{\underline{g}}^l$ et

$$\frac{1}{2}\|\overline{\underline{G}}^l\|_{W^{k-l}_\beta(Q)} \le \|\overline{\underline{g}}^l\|_{W^{k-l-\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^l)} \le \|\overline{\underline{G}}^l\|_{W^{k-l}_\beta(Q)}.$$

Comme au paragraphe 4.1, nous définissons

$$\tilde{\underline{f}}(t,\theta) := e^{-2t}\overline{\underline{f}}(e^{-t},\theta), \quad \tilde{h}(t,\theta) := e^{-t}h(e^{-t},\theta), \quad \tilde{\underline{G}}^l(t,\theta) := e^{-lt}\overline{\underline{G}}^l(e^{-t},\theta), \quad l = 0,1$$

ainsi que

$$\hat{\underline{f}} := \mathcal{F}(\tilde{\underline{f}}), \quad \hat{h} = \mathcal{F}(\tilde{h}), \quad \hat{\underline{G}}^l = \mathcal{F}(\tilde{\underline{G}}^l), \quad l = 0,1.$$

Par les lemmes 4.4, 4.5, $\hat{\underline{f}} \in H^{k-2}(I)^2$, $\hat{h} \in H^{k-1}(I)$, $\hat{\underline{G}}^l \in H^{k-l}(I)^2$ pour presque chaque $\lambda \in \mathcal{L}_h$. Par le théorème 4.6, le système (4.17) admet une unique solution $\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{p}} \in H^k(I)^2 \times H^{k-1}(I)$ et

$$|||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(I)} + |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(I)} \le C\Big(|||\hat{\underline{f}}|||^2_{H^{k-2}(I)} + |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(I)} + \sum_{l=1}^{2}|\lambda|^{2k-1-2l}|\hat{\underline{g}}^l|^2\Big)$$

pour presque chaque $\lambda \in \mathcal{L}_h$. Intégrant cette dernière inégalité, et utilisant le lemme 4.6, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{-\infty+ih}^{\infty+ih} |||\hat{\underline{u}}|||^2_{H^k(I)}\,d\lambda + \int_{-\infty+ih}^{\infty+ih} |||\hat{p}|||^2_{H^{k-1}(I)}\,d\lambda \;\le\; & C\Big(\int_{-\infty+ih}^{\infty+ih} |||\hat{\underline{f}}|||^2_{H^{k-2}(I)}\,d\lambda + \int_{-\infty+ih}^{\infty+ih} |||\hat{h}|||^2_{H^{k-1}(I)}\,d\lambda \\ & + \sum_{l=0,1}\int_{-\infty+ih}^{\infty+ih} |||\hat{\underline{G}}^l|||^2_{H^{k-l}(I)}\,d\lambda\Big).\end{aligned} \tag{4.56}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix}\tilde{\underline{u}}\\ \tilde{p}\end{pmatrix} := \mathcal{F}^{-1}\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+ih}^{\infty+ih} e^{i\lambda t}\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{p}\end{pmatrix}d\lambda \;\in H^k_h(D)^2 \times H^{k-1}_h(D)$$

est l'unique solution du système (4.9), et donc

$$\begin{pmatrix}\overline{\underline{u}}\\ \overline{p}\end{pmatrix}(r,\theta) := \begin{pmatrix}\tilde{\underline{u}}\\ \tilde{p}\end{pmatrix}(\ln(\frac{1}{r}),\theta) \;\in W^k_\beta(Q)^2 \times W^{k-1}_\beta(Q)$$

est l'unique solution du problème (4.5) ; (4.56), (4.51) et (4.53) impliquent

$$\|\overline{\underline{u}}\|_{W_\beta^k(Q)} + \|\overline{p}\|_{W_\beta^{k-1}(Q)} \leq C\Big(\|\overline{\underline{f}}\|_{W_\beta^{k-2}(Q)} + \|\overline{h}\|_{W_\beta^{k-1}(Q)} + \sum_{l=0,1} \|\overline{\underline{G}}^l\|_{W_\beta^{k-l}(Q)}\Big)$$

et donc (4.55). □

Remarque 4.1 *Le théorème précédent est valable pour $k \geq 2$, mais nous n'utiliserons par la suite que $k = 2$. En fait, le cas $k > 2$ ne présente pas d'intérêt dans la pratique, car il implique des conditions irréalistes sur la régularité des données.*

Nous avons, en coordonnées cartésiennes, le résultat suivant :

Théorème 4.8 *Soit $\underline{f} \in W_\beta^0(Q)^2$, $h \in W_\beta^1(Q)^2$, $\underline{g}^l \in W_\beta^{\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)^2$, $l = 0, 1$, avec $\beta > 1-\kappa_1$, $\beta > 0$. Alors le problème (4.1) muni d'une des trois conditions au bord (4.2), (4.3) ou (4.4) possède une unique solution $\binom{\underline{u}}{p} \in W_\beta^2(Q)^2 \times W_\beta^1(Q)$ et*

$$\|\underline{u}\|_{W_\beta^2(Q)} + \|p\|_{W_\beta^1(Q)} \leq C\Big(\|\underline{f}\|_{W_\beta^0(Q)} + \|h\|_{W_\beta^1(Q)} + \sum_{l=0,1} \|\underline{g}^l\|_{W_\beta^{\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)}\Big), \tag{4.57}$$

où $C = C(\beta, k)$ est une constante indépendante de $\underline{f}$, h, $\underline{g}^l$, $l = 0, 1$.

Démonstration : Nous partons du théorème 4.7 avec $k = 2$, et nous passons en coordonnées cartésiennes par la transformation $\underline{u} = \underline{\underline{A}}^{-1}\overline{\underline{u}}$. D'après [3], corollary 4.2, (4.57) est une conséquence de (4.55). □

5 Régularité de la solution dans le polygone Ω

Nous pouvons maintenant analyser la régularité de la solution dans le polygone Ω, avec des données $\underline{f} \in L_\beta(\Omega)^2$, $h \in H_\beta^{1,1}(\Omega)$, $\underline{g}^l \in H_\beta^{\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)$, $l = 0, 1$. La démarche et les arguments utilisés ici sont tout-à-fait similaires à ceux de la section 5 de [3].

Supposons que le sommet A_1 est à l'origine et que Γ_1 coïncide avec l'axe des x_1 positifs. (r, θ) désigne les coordonnées polaires centrées en A_1 et $S_\delta := \{(r, \theta) : 0 < r < \delta,\ 0 < \theta < \omega_1\} \subset \Omega$ (fig. 2). Soit $\phi_\delta(r) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ telle que $\phi_\delta \equiv 1$ pour $0 < r < \delta/2$ et $\phi_\delta \equiv 0$ pour $r > \delta$. Soit encore $\tilde{\underline{u}} := \phi_\delta \underline{u}$ si $\Gamma_1 \cup \Gamma_M \subset \Gamma^1$, $\tilde{\underline{u}} := \phi_\delta(\underline{u} - \underline{g}^0(A_1))$ sinon, $\tilde{p} := \phi_\delta p$ où $\underline{u}, p$ est la solution faible de (3.10), avec les mêmes hypothèses sur les données que dans l'énoncé du théorème 3.1. En prolongeant par zéro à l'extérieur de S_δ, $\tilde{\underline{u}}$ et $\tilde{p}$ sont définis dans le secteur infini $Q = \{(r, \theta) : 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < \omega_1\}$.

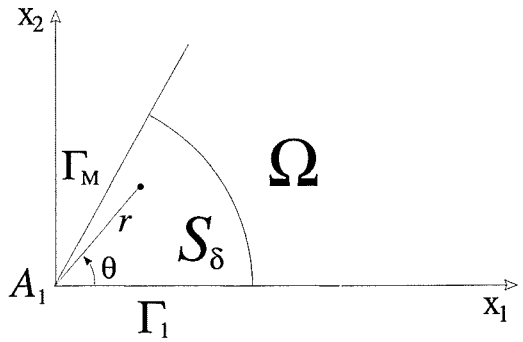

FIG. 2 – voisinage du sommet A_1

Nous désignerons par L l'opérateur différentiel défini en (3.3).
Nous avons

$$L\begin{pmatrix}\tilde{\underline{u}}\\ \tilde{p}\end{pmatrix} = \phi_\delta\begin{pmatrix}\underline{f}\\ h\end{pmatrix} + L_\delta\begin{pmatrix}\underline{u}\\ p\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}\tilde{\underline{f}}\\ \tilde{h}\end{pmatrix} \tag{5.1}$$

où L_δ est un opérateur différentiel d'un degré inférieur à L ($L_\delta\left(\frac{u}{p}\right)$ ne contient que des termes $pD^\alpha\phi_\delta,\ |\alpha| = 1, D^\alpha u D^{\alpha'}\phi_\delta,\ 0 \le |\alpha| \le 1,\ 1 \le |\alpha'| \le 2$), et

$$\tilde{\underline{u}}|_{\theta=0,\omega} = \phi_\delta(\underline{g}^0 - \underline{g}^0(A_1)) =: \tilde{\underline{g}}^0 \quad \text{si} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_M \subset \Gamma^0, \tag{5.2}$$

$$\pm\underline{\underline{\sigma}}[\tilde{\underline{u}}, \tilde{p}]\underline{n}|_{\theta=0,\omega} = \phi_\delta \underline{g}^1 + l_\delta[\underline{u}] =: \tilde{\underline{g}}^1 \quad \text{si} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_M \subset \Gamma^1, \tag{5.3}$$

$$\tilde{\underline{u}}|_{\theta=0} = \tilde{\underline{g}}^0, \quad \underline{\underline{\sigma}}[\tilde{\underline{u}}, \tilde{p}]\underline{n}|_{\theta=\omega} = \tilde{\underline{g}}^1 \quad \text{si} \quad \Gamma_1 \subset \Gamma^0,\ \Gamma_M \subset \Gamma^1, \tag{5.4}$$

où l_δ est un opérateur d'un degré inférieur à $\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}, p]\underline{n}$.

Nous allons maintenant analyser la relation entre la solution $(\underline{v}, q) \in W^2_\beta(Q)^2 \times W^1_\beta(Q)$ du problème (5.1) dans le secteur $Q := \{(r,\theta) : 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < \omega_1\}$ et la solution faible $(\underline{u}, p) \in H^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$.

5.1 Relation entre les solutions dans le polygone Ω et dans le secteur Q

Lemme 5.1 *Nous avons :*

1. $\|v\|_{W^1_\beta(Q)} \le C\|v\|_{H^{1,1}_\beta(Q)} \quad \forall\, v \in H^{1,1}_\beta(Q)$,
2. $\|v\|_{W^2_\beta(Q)} \le C\|v\|_{H^{2,2}_\beta(Q)} \quad \forall\, v \in H^{2,2}_\beta(Q)$ *avec* $v(0) = 0$,
3. *Pour* $\delta > 0$ *quelconque, nous avons* $H^{2,2}_\beta(S_\delta) \subset C^0(\overline{S_\delta})$ *et* $\|v\|_{H^{2,2}_\beta(S_\delta)} \le C\|v\|_{C^0(\overline{S_\delta})}$ $\forall\, v \in H^{2,2}_\beta(S_\delta)$.

Pour la preuve, voir [7], Lemma A.2, et [11], Lemma 2.1.

Nous commençons par remarquer que les données $\tilde{\underline{f}},\ \tilde{h}, \tilde{\underline{g}}^l,\ l = 0,1$ ont un support compact, et, utilisant le lemme 5.1,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\underline{g}}^0\|_{W^{\frac{3}{2}}_\beta(\Gamma^0_Q)} &\le C\|\underline{g}^0 - \underline{g}^0(A_1)\|_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_\beta(\Gamma^0_\delta)} \\
&\le C\big(\|\underline{g}^0\|_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_\beta(\Gamma^0_\delta)} + |\underline{g}^0(A_1)|\big) \\
&\le C\|\underline{g}^0\|_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_\beta(\Gamma^0_\delta)},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\underline{g}}^1\|_{W^{\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^1_Q)} &\le C\big(\|\underline{g}^1\|_{H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^1_\delta)} + \|l_\delta[\underline{u}]\|_{H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^1_\delta)}\big) \\
&\le C\big(\|\underline{g}^1\|_{H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^1_\delta)} + \|\underline{u}\|_{H^1(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} + \|\underline{g}^0\|_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_\beta(\Gamma^0_\delta)}\big),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\underline{f}}\|_{L_\beta(Q)} &\le C\big(\|\underline{f}\|_{L_\beta(S_\delta)} + \|[L_\delta\begin{pmatrix}\underline{u}\\ p\end{pmatrix}]_{1,2}\|_{L_\beta(S_\delta)}\big) \\
&\le C\big(\|\underline{f}\|_{L_\beta(S_\delta)} + \|\underline{u}\|_{H^1(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} + \|\underline{g}^0\|_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_\beta(\Gamma^0_\delta)} + \|p\|_{L^2(S_\delta\setminus S_{\delta/2})}\big),
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{h}\|_{W^1_\beta(Q)} &\le C\big(\|h\|_{W^1_\beta(S_\delta)} + \|[L_\delta\begin{pmatrix}\underline{u}\\ p\end{pmatrix}]_3\|_{W^1_\beta(S_\delta)}\big) \\
&\le C\big(\|h\|_{H^{1,1}_\beta(S_\delta)} + \|\underline{u}\|_{H^1(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} + \|\underline{g}^0\|_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_\beta(\Gamma^0_\delta)}\big)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

où $\Gamma^l_\delta := \Gamma^l \cap \partial S_\delta,\ l = 0,1$, et $\Gamma^l_Q,\ l = 0,1$ est le prolongement de Γ^l_δ le long de ∂Q, et où les termes $\|\underline{g}^0\|_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_\beta(\Gamma^0_\delta)}$ sont absents dans le cas $\Gamma_1 \cup \Gamma_M \subset \Gamma^1$.

Le théorème 4.8 garantit l'existence et l'unicité de $(\underline{v}, q) \in W^2_\beta(Q)^2 \times W^1_\beta(Q)$, la solution de (5.1-5.4) dans Q. Nous avons le résultat suivant sur la solution $(\underline{v}, q)$:

Lemme 5.2 *Pour la solution $(\underline{v}, q)$ du problème (5.1) avec condition au bord de Dirichlet (5.2) ou de type mixte (5.4), nous avons*

$$\|D^1\underline{v}\|^2_{L^2(Q)} + \|r^{-1}\underline{v}\|^2_{L^2(Q)} + \|q\|^2_{L^2(Q)} < \infty. \tag{5.9}$$

Pour la solution $(\underline{v}, q)$ du problème (5.1) avec condition au bord de Neumann (5.3), nous avons

$$\|D^1\underline{v}\|^2_{L^2(Q)} + \|q\|^2_{L^2(Q)} < \infty. \tag{5.10}$$

($\|D^1\underline{v}\|^2_{L^2(Q)}$ signifie $\int_Q (|\partial_{x_1}\underline{v}|^2 + |\partial_{x_2}\underline{v}|^2)\, dx$)

Nous ne donnons pas ici la preuve, car elle est tout-à-fait analogue à [3], theorem 4.4 et corollary 4.3.

Théorème 5.1 *Soit $\binom{\underline{u}}{p}$ la solution du problème (3.10) avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.1, $\beta > 1 - \kappa_1$, $\beta > 0$. et soit $\underline{\tilde{u}} := \phi_\delta \underline{u}$ si $\Gamma_1 \cup \Gamma_M \subset \Gamma^1$, $\underline{\tilde{u}} := \phi_\delta(\underline{u} - \underline{g}^0(A_1))$ sinon, ainsi que $\tilde{p} := \phi_\delta p$. Alors*

1. *Si $\Gamma_1 \cup \Gamma_M \not\subset \Gamma^1$, $\binom{\underline{\tilde{u}}}{\tilde{p}} \in W^2_\beta(Q)^2 \times W^1_\beta(Q)$ et*

$$\begin{aligned}\|\underline{\tilde{u}}\|_{W^2_\beta(Q)} + \|\tilde{p}\|_{W^1_\beta(Q)} \le C\Big(&\|\underline{f}\|_{L_\beta(S_\delta)} + \|h\|_{H^{1,1}_\beta(S_\delta)} + \sum_{l=0,1} \|\underline{g}^l\|_{H^{\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}_\beta(\Gamma^1_\delta)} \\ &+ \|\underline{u}\|_{H^1(S_\delta \setminus S_{\delta/2})} + \|p\|_{L^2(S_\delta \setminus S_{\delta/2})}\Big)\end{aligned} \tag{5.11}$$

2. *Si $\Gamma_1 \cup \Gamma_M \subset \Gamma^1$, $\binom{\underline{\tilde{u}} - \underline{\tilde{u}}(A_1)}{\tilde{p}} \in W^2_\beta(Q)^2 \times W^1_\beta(Q)$ et*

$$\begin{aligned}\|\underline{\tilde{u}} - \underline{\tilde{u}}(A_1)\|_{W^2_\beta(Q)} + \|\tilde{p}\|_{W^1_\beta(Q)} \le C\Big(&\|\underline{f}\|_{L_\beta(S_\delta)} + \|h\|_{H^{1,1}_\beta(S_\delta)} + \|\underline{g}^1\|_{H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^1_\delta)} \\ &+ \|\underline{u}\|_{H^1(S_\delta \setminus S_{\delta/2})} + \|p\|_{L^2(S_\delta \setminus S_{\delta/2})}\Big)\end{aligned} \tag{5.12}$$

Démonstration :

1. Nous supposons $\Gamma_1 \cup \Gamma_M \subset \Gamma^0$ (Dirichlet), le cas de type mixte se traitant de manière analogue. $\underline{\tilde{u}}$ et $\tilde{p}$ satisfont l'équation

$$L\begin{pmatrix}\underline{\tilde{u}} \\ \tilde{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{\tilde{f}} \\ \tilde{h}\end{pmatrix} \quad \text{dans} \quad Q, \quad \underline{\tilde{u}}|_{\partial Q} = \underline{\tilde{g}}^0.$$

Pour tout $\binom{\underline{w}}{\sigma} \in \tilde{H}^1_0(Q)^2 \times L^2(Q)$ avec

$$\tilde{H}^1_0(Q) := \{u : \|D^1 u\|_{L^2(Q)} < \infty,\ u|_{\partial Q} = 0\},$$

nous avons d'une part

$$\begin{aligned} a(\underline{\tilde{u}}, \underline{w})_Q + b(\tilde{p}, \underline{w})_Q &= \tilde{F}(\underline{w}) \\ b(\sigma, \underline{\tilde{u}})_Q - \varepsilon(\sigma, \tilde{p})_Q &= \tilde{l}(\sigma) \end{aligned}$$

où $a(\cdot,\cdot)_Q$, $b(\cdot,\cdot)_Q$ sont les formes bilinéaires définies en (3.8) mais avec domaine d'intégration Q, et

$$\tilde{F}(\underline{w}) = \int_Q \underline{\tilde{f}} \cdot \underline{w}\, dx, \quad \tilde{l}(\sigma) = -\int_Q \tilde{h}\sigma\, dx.$$

D'autre part, pour tout $\binom{\underline{w}}{\sigma} \in \tilde{\tilde{H}}^1_0(Q)^2 \times L^2(Q)$ avec

$$\tilde{\tilde{H}}^1_0(Q) := \{u \in \tilde{H}^1_0(Q) : u \text{ a un support compact dans } Q\},$$

nous avons pour la solution $\binom{\underline{v}}{q}$ de (5.1), (5.2) en intégrant par parties

$$\begin{aligned} a(\underline{v},\underline{w})_Q + b(q,\underline{w})_Q &= \tilde{F}(\underline{w}) \\ b(\sigma,\underline{v})_Q - \varepsilon(\sigma,q)_Q &= \tilde{l}(\sigma) \end{aligned}$$

ce qui implique $\forall \binom{\underline{w}}{\sigma} \in \tilde{\tilde{H}}^1_0(Q)^2 \times L^2(Q)$

$$\begin{aligned} a(\underline{v}-\underline{\tilde{u}},\underline{w})_Q + b(q-\tilde{p},\underline{w})_Q &= 0 \\ b(\sigma,\underline{v}-\underline{\tilde{u}})_Q - \varepsilon(\sigma,q-\tilde{p})_Q &= 0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Comme $\tilde{\tilde{H}}^1_0(Q)^2$ est dense dans $\tilde{H}^1_0(Q)^2$ et par le lemme 5.2 nous avons

$$\begin{aligned} a(\underline{v}-\underline{\tilde{u}},\underline{v}-\underline{\tilde{u}})_Q + b(q-\tilde{p},\underline{v}-\underline{\tilde{u}})_Q &= 0 \\ b(q-\tilde{p},\underline{v}-\underline{\tilde{u}})_Q - \varepsilon(q-\tilde{p},q-\tilde{p})_Q &= 0 \end{aligned}$$

et en substituant la deuxième égalité

$$a(\underline{v}-\underline{\tilde{u}},\underline{v}-\underline{\tilde{u}})_Q + \varepsilon\|q-\tilde{p}\|^2_{L^2(Q)} = 0 \tag{5.14}$$

Ainsi, $\underline{v}-\underline{\tilde{u}} \in \mathcal{R}$ (l'espace des déplacements rigides) et comme $\underline{v}-\underline{\tilde{u}}|_{\partial Q} = 0$, $\underline{v} \equiv \underline{\tilde{u}}$ dans Q.
Si $\varepsilon > 0$, (5.14) implique immédiatement $q \equiv \tilde{p}$ dans Q.
Si $\varepsilon = 0$, il existe d'après la proposition 3.1 (ou plus exactement [8], corollary 2.4) $\underline{w} \in \tilde{H}^1_0(Q_R)^2$ tel que $\underline{\nabla} \cdot \underline{w} = q - \tilde{p}$ dans le secteur tronqué $Q_R := \{x \in Q : |x| < R\}$, R quelconque. Nous pouvons prolonger $\underline{w}$ sur Q entier de sorte à ce que $\|\underline{w}\|_{H^1(Q)} \leq C\|\underline{w}\|_{H^1(Q_R)}$. Nous posons $\underline{\tilde{w}} := \psi_\eta \underline{w}$, où $\psi_\eta \in C^\infty(Q)$ avec $\psi_\eta = 1$ dans Q_R, $\psi_\eta = 0$ dans $Q \setminus Q_{R+\eta}$, $\eta > 0$. Partant de (5.13), nous avons alors

$$0 = \int_Q (q-\tilde{p})\underline{\nabla} \cdot \underline{\tilde{w}}\, dx = \int_{Q_R} (q-\tilde{p})^2\, dx + \int_{Q_{R+\eta}\setminus Q_R} (q-\tilde{p})\underline{\nabla} \cdot \underline{\tilde{w}}\, dx$$

Par ailleurs,

$$\left| \int_{Q_{R+\eta}\setminus Q_R} (q-\tilde{p})\underline{\nabla} \cdot \underline{\tilde{w}}\, dx \right| \leq C\|q-\tilde{p}\|_{L^2(Q_{R+\eta}\setminus Q_R)}\|\underline{w}\|_{H^1(Q_R)}$$

et $\|q-\tilde{p}\|_{L^2(Q_{R+\eta}\setminus Q_R)} \to 0$ si $\eta \to 0$ (puisque $\|q-\tilde{p}\|_{L^2(Q)} < \infty$). Cela implique que $\|q-\tilde{p}\|_{L^2(Q_R)} = 0$. R étant quelconque, $q \equiv \tilde{p}$ dans Q.

Nous avons donc montré que

$$\begin{pmatrix} \underline{\tilde{u}} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{v} \\ q \end{pmatrix} \in W^2_\beta(Q)^2 \times W^1_\beta(Q)$$

et (5.5-5.8) impliquent avec le théorème 4.8 l'estimation a-priori (5.11).

2. Dans le cas de Neumann, $\underline{\tilde{u}} = \phi_\delta \underline{u}$ et $\tilde{p} = \phi_\delta p$ satisfont (5.1), (5.3). Nous avons d'une part, pour tout $\underline{w} \in \tilde{H}^1(Q)^2 := \{\underline{w} : \|D^1\underline{w}\|_{L^2(Q)} < \infty\}$ et pour tout $\sigma \in L^2(Q)$,

$$\begin{aligned} a(\underline{\tilde{u}},\underline{w})_Q + b(\tilde{p},\underline{w})_Q &= \tilde{F}(\underline{w}) \\ b(\sigma,\underline{\tilde{u}})_Q - \varepsilon(\sigma,\tilde{p})_Q &= \tilde{l}(\sigma) \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{F}(\underline{w}) = \int_Q \underline{\tilde{f}} \cdot \underline{w}\, dx + \int_{\Gamma^1_Q} \underline{\tilde{g}}^1 \cdot \underline{w}\, ds, \quad \tilde{l}(\sigma) = -\int_Q \tilde{h}\sigma\, dx.$$

D'autre part, pour tout $\underline{w} \in \tilde{\tilde{H}}^1(Q)^2 := \{\underline{w} \in \tilde{H}^1(Q)^2 : \underline{w}$ a un support compact$\}$ et pour tout $\sigma \in L^2(Q)$

$$\begin{aligned} a(\underline{v},\underline{w})_Q + b(q,\underline{w})_Q &= \tilde{F}(\underline{w}) \\ b(\sigma,\underline{v})_Q - \varepsilon(\sigma,q)_Q &= \tilde{l}(\sigma) \end{aligned}$$

où $\binom{\underline{v}}{q} \in W^2_\beta(Q)^2 \times W^1_\beta(Q)$ est l'unique solution de (5.1),(5.3), ce qui implique $\forall \binom{\underline{w}}{\sigma} \in \tilde{\tilde{H}}^1(Q)^2 \times L^2(Q)$

$$\begin{aligned} a(\underline{v}-\tilde{\underline{u}},\underline{w})_Q + b(q-\tilde{p},\underline{w})_Q &= 0 \\ b(\sigma,\underline{v}-\tilde{\underline{u}})_Q - \varepsilon(\sigma,q-\tilde{p})_Q &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Comme au cas précédent, nous en concluons que

$$a(\underline{v}-\tilde{\underline{u}},\underline{v}-\tilde{\underline{u}})_Q = 0, \quad \|q-\tilde{p}\|_{L^2(Q)} = 0.$$

Ainsi, $\underline{v}-\tilde{\underline{u}} = \sum_{j=1}^3 c_j \underline{e}_j$ pour certaines constantes c_j, et $\underline{e}_j$ sont les déplacements rigides donnés par

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Le lemme 5.2 implique $\|D^1(\underline{v}-\tilde{\underline{u}})\|_{L^2(Q)} < \infty$, donc $c_3 = 0$ et

$$\underline{v}-\tilde{\underline{u}} = \sum_{j=1}^2 c_j \underline{e}_j, \quad q = \tilde{p}.$$

Par le théorème 4.8 et les estimations (5.6-5.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\tilde{\underline{u}} + \sum_{j=1}^2 c_j \underline{e}_j\|_{W^2_\beta(Q)} + \|\tilde{p}\|_{W^1_\beta(Q)} \leq C\Big(&\|\underline{f}\|_{L_\beta(S_\delta)} + \|h\|_{H^{1,1}_\beta(S_\delta)} + \|\underline{g}^1\|_{H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma^1_\delta)} \\ &+ \|\underline{u}\|_{H^1(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} + \|p\|_{L^2(S_\delta\setminus S_{\delta/2})}\Big) \end{aligned}$$

Puisque $W^2_\beta(Q) \subset H^{2,2}_\beta(S_\delta) \subset C^0(\overline{S_\delta})$ (lemme 5.1), $\underline{v}(A_1)$ existe et finalement, comme $r^{\beta-2}\underline{v} \in L^2(Q)^2$, nous avons $\underline{v}(A_1) = 0$ et donc $\tilde{\underline{u}} + \sum_{j=1}^2 c_j \underline{e}_j = \tilde{\underline{u}} - \tilde{\underline{u}}(A_1)$, ce qui conclut la démonstration. □

5.2 Régularité des dérivées secondes

Nous établissons dans ce paragraphe la régularité $\left(H^{2,2}_\beta\right)^2 \times H^{1,1}_\beta$ dans le polygone Ω. Nous débutons avec un résultat au voisinage d'un sommet :

Théorème 5.2 *Soit $\binom{\underline{u}}{p}$ la solution du problème (3.10) avec les mêmes hypothèses que dans l'énoncé du théorème 3.1, $\beta > 1-\kappa_1$, $\beta > 0$. Alors $\binom{\underline{u}}{p} \in H^{2,2}_\beta(S_{\delta/2})^2 \times H^{1,1}_\beta(S_{\delta/2})$ (où $S_{\delta/2}$ est défini comme en début de section) et*

$$\begin{aligned} \|\underline{u}\|_{H^{2,2}_\beta(S_{\delta/2})} + \|p\|_{H^{1,1}_\beta(S_{\delta/2})} \leq C\Big(&\|\underline{f}\|_{L_\beta(S_\delta)} + \|h\|_{H^{1,1}_\beta(S_\delta)} + \sum_{l=0,1} \|\underline{g}^l\|_{H^{\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}_\beta(\Gamma^l_\delta)} \\ &+ \|\underline{u}\|_{H^1(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} + \|p\|_{L^2(S_\delta\setminus S_{\delta/2})}\Big). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Démonstration : Puisque $\|\cdot\|_{H^{1,1}_\beta(S_{\delta/2})} \le C\|\cdot\|_{W^l_\beta(S_{\delta/2})}$, $l \in \mathbb{N}$, et $H^{2,2}_\beta(S_{\delta/2}) \subset C^0(\overline{S_{\delta/2}})$ le théorème précédent implique

$$\|\underline{u} - \underline{u}(A_1)\|_{H^{2,2}_\beta(S_{\delta/2})} + \|p\|_{H^{1,1}_\beta(S_{\delta/2})} \le C\Big(\|\underline{f}\|_{L_\beta(S_\delta)} + \|h\|_{H^{1,1}_\beta(S_\delta)} + \sum_{l=0,1} \|\underline{g}^l\|_{H^{\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}_\beta(\Gamma^l_\delta)} + \|\underline{u}\|_{H^1(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} + \|p\|_{L^2(S_\delta\setminus S_{\delta/2})}\Big).$$

Si $\Gamma_1 \cup \Gamma_M \not\subset \Gamma^1$ (cas 1 dans théorème 5.1), l'inégalité

$$|\underline{u}(A_1)| = |\underline{g}^0(A_1)| \le C\|\underline{g}^0\|_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_\beta(\Gamma^0_\delta)}$$

implique (5.16) immédiatement.

Si $\Gamma_1 \cup \Gamma_M \subset \Gamma^1$ (cas 2 dans théorème 5.1), les inégalités

$$|\underline{u}(A_1)| \le \|\tilde{\underline{u}} - \tilde{\underline{u}}(A_1)\|_{C^0(S_\delta)} \le C\|\tilde{\underline{u}} - \tilde{\underline{u}}(A_1)\|_{W^2_\beta(Q)}$$

et (5.12) impliquent (5.16) immédiatement. □

Nous avons finalement

Théorème 5.3 *Soient $\underline{f} \in L_\beta(\Omega)^2$, $h \in H^{1,1}_\beta(\Omega)$, $\underline{g}^l \in H^{\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}_\beta(\Gamma^l)$, $l = 0,1$ avec $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_M)$, $\beta_i > 1-\kappa^i_1$, $\beta_i > 0$, où κ^i_1 est la plus petite partie réelle positive des solutions de l'équation transcendante (avec $\omega = \omega_i$) (4.45) si $\Gamma_{i-1} \cup \Gamma_i \subset \Gamma^0$, (4.46) si $\Gamma_{i-1} \cup \Gamma_i \subset \Gamma^1$, ou (4.47) sinon, $i = 1,\dots,M$. On suppose (3.14) si $|\Gamma^1| = 0$ et $\varepsilon = 0$, (3.15) si $|\Gamma^0| = 0$.*

Alors, si $|\Gamma^0| > 0$, le problème (3.1) possède une unique solution $\binom{\underline{u}}{p} \in H^{2,2}_\beta(\Omega)^2 \times H^{1,1}_\beta(\Omega)$ et

$$\|\underline{u}\|_{H^{2,2}_\beta(\Omega)} + \|p\|_{H^{1,1}_\beta(\Omega)} \le C\Big(\|\underline{f}\|_{L_\beta(\Omega)} + \|h\|_{H^{1,1}_\beta(\Omega)} + \sum_{l=0,1} \|\underline{g}^l\|_{H^{\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}_\beta(\Gamma^l)}\Big) \tag{5.17}$$

où $C = C(\beta)$ est une constante indépendante des données $\underline{f}$, h, $\underline{g}^l$, $l = 0,1$.

Si $|\Gamma^0| = 0$, la solution $\binom{\underline{u}}{p} \in H^{2,2}_\beta(\Omega)^2 \times H^{1,1}_\beta(\Omega)$ existe, est unique modulo l'espace $\mathcal{R}$ des 'rigid body motions', et l'estimation a-priori (5.17) est valable avec $\underline{g}^0 = \underline{0}$.

Démonstration : L'existence et l'unicité dans $H^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$ nous est fournie par le théorème 3.1.

Soit $S^i_\delta = \{(r_i,\theta_i) : 0 < r_i < \delta,\ 0 < \theta_i < \omega_i\}$ où (r_i,θ_i) représente les coordonnées polaires centrées en A_i; on choisit $\delta > 0$ suffisament petit pour que $S^i_\delta \subset \Omega$ et on pose $\Omega_\delta := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^M S^i_\delta$ (fig. 3, page 29). Par l'argument usuel du quotient de différence, nous avons $\binom{\underline{u}}{p} \in H^2(\Omega_\delta)^2 \times H^1(\Omega_\delta)$ et

$$\|\underline{u}\|_{H^2(\Omega_\delta)} + \|p\|_{H^1(\Omega_\delta)} \le C\big(\|\underline{f}\|_{L_\beta(\Omega)} + \|h\|_{H^{1,1}_\beta(\Omega)} + \sum_{l=0,1} \|\underline{g}^l\|_{H^{\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}_\beta(\Gamma^l)}\big). \tag{5.18}$$

Au voisinage du sommet A_i, nous appliquons le théorème 5.2 : $\binom{\underline{u}}{p} \in H^{2,2}_{\beta_i}(S^i_\delta)^2 \times H^{1,1}_{\beta_i}(S^i_\delta)$ et

$$\|\underline{u}\|_{H^{2,2}_{\beta_i}(S^i_\delta)} + \|p\|_{H^{1,1}_{\beta_i}(S^i_\delta)} \le C\big(\|\underline{f}\|_{L_\beta(\Omega)} + \|h\|_{H^{1,1}_\beta(\Omega)} + \sum_{l=0,1} \|\underline{g}^l\|_{H^{\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}_\beta(\Gamma^l)}\big) \tag{5.19}$$

Combinant (5.18) et (5.19), nous obtenons (5.17). □

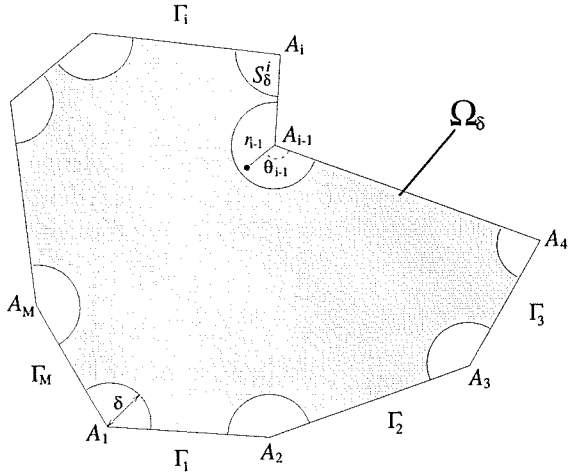

FIG. 3 – domaine Ω_δ

5.3 Régularité analytique

Nous arrivons enfin à notre résultat principal :

Théorème 5.4 *Soient $k \geq 0$ entier, $\underline{f} \in H_\beta^{k,0}(\Omega)^2$, $h \in H_\beta^{k+1,1}(\Omega)$, $\underline{g}^l \in H_\beta^{k+\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)$, $l = 0,1$ avec $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_M)$, $\beta_i > 1 - \kappa_1^i$, $\beta_i > 0$, où κ_1^i est la plus petite partie imaginaire positive des solutions de l'équation transcendante (avec $\omega = \omega_i$) (4.45) si $\Gamma_{i-1} \cup \Gamma_i \subset \Gamma^0$, (4.46) si $\Gamma_{i-1} \cup \Gamma_i \subset \Gamma^1$, ou (4.47) sinon, $i = 1, \ldots, M$. On suppose (3.14) si $|\Gamma^1| = 0$ et $\varepsilon = 0$, (3.15) si $|\Gamma^0| = 0$.*

Alors, si $|\Gamma^0| > 0$, le problème (3.1) possède une unique solution $\binom{\underline{u}}{p} \in H_\beta^{k+2,2}(\Omega)^2 \times H_\beta^{k+1,1}(\Omega)$ et

$$\|\underline{u}\|_{H_\beta^{k+2,2}(\Omega)} + \|p\|_{H_\beta^{k+1,1}(\Omega)} \leq C\Big(\|\underline{f}\|_{H_\beta^{k,0}(\Omega)} + \|h\|_{H_\beta^{k+1,1}(\Omega)} + \sum_{l=0,1} \|\underline{g}^l\|_{H_\beta^{k+\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)}\Big) \tag{5.20}$$

où $C = C(k, \beta)$ est une constante indépendante des données $\underline{f}$, h, $\underline{g}^l$, $l = 0,1$.

Si $|\Gamma^0| = 0$, la solution $\binom{\underline{u}}{p} \in H_\beta^{k+2,2}(\Omega)^2 \times H_\beta^{k+1,1}(\Omega)$ existe, est unique modulo l'espace $\mathcal{R}$ des déplacements rigides, et l'estimation a-priori (5.17) est valable avec $\underline{g}^0 = \underline{0}$.

De plus, si $\underline{f} \in B_\beta^0(\Omega)^2$, $h \in B_\beta^1(\Omega)$, $\underline{g}^l \in B_\beta^{\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)^2$, $l = 0,1$, alors $\binom{\underline{u}}{p} \in B_\beta^2(\Omega)^2 \times B_\beta^1(\Omega)$.

Remarque 5.1 *Si $\Gamma^0 = \partial\Omega$, l'estimation a-priori (5.20) est valable sans le terme $\|\underline{g}^1\|_{H_\beta^{k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma^1)}$.*

Démonstration : Le cas $k = 0$ est déjà prouvé (théorème 5.3).

Pour $\delta > 0$, on définit $S_\delta^i = \{(r_i, \theta_i) : 0 < r_i < \delta,\ 0 < \theta_i < \omega_i\}$ où (r_i, θ_i) représente les coordonnées polaires centrées en A_i; on choisit $\delta > 0$ suffisament petit pour que $S_\delta^i \subset \Omega$, $S_\delta^i \cap S_\delta^j = \emptyset$ si $i \neq j$ et on pose $\Omega_\delta := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^M S_\delta^i$. Par l'argument usuel de quotient de différence, nous avons $\binom{\underline{u}}{p} \in H^{k+2}(\Omega_{\delta/2})^2 \times H^{k+1}(\Omega_{\delta/2})$ et

$$\begin{aligned}\|\underline{u}\|_{H^{k+2}(\Omega_{\delta/2})} + \quad \|p\|_{H^{k+1}(\Omega_{\delta/2})} &\leq C\big(\|\underline{f}\|_{H^k(\Omega_{\delta/4})} + \|h\|_{H^{k+1}(\Omega_{\delta/4})} + \sum_{l=0,1} \|\underline{G}^l\|_{H^{k+2-l,2-l}(\Omega_{\delta/4})}\big) \\ &\leq C\big(\|\underline{f}\|_{H_\beta^{k,0}(\Omega)} + \|h\|_{H_\beta^{k+1,1}(\Omega)} + \sum_{l=0,1} \|\underline{g}^l\|_{H_\beta^{k+\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)}\big).\end{aligned} \tag{5.21}$$

où $\underline{G}^l|_{\Gamma^l} = \underline{g}^l,\ l = 0,1$ et

$$\frac{1}{2}\|\underline{G}^l\|_{H^{k+2-l,2-l}(\Omega)} \le \|\underline{g}^l\|_{H_\beta^{k+\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)} \le \|\underline{G}^l\|_{H^{k+2-l,2-l}(\Omega)}.$$

Si $\underline{f} \in B_\beta^0(\Omega)^2,\ h \in B_\beta^1(\Omega),\ \underline{g}^l \in B_\beta^{\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)^2,\ l = 0,1$, ces données sont analytiques dans $\Omega_{\delta/4}$, et par un argument de Morrey [12], $\underline{u}$ et p sont analytiques dans $\Omega_{\delta/2}$, i.e. $\binom{\underline{u}}{p} \in B_\beta^2(\Omega_{\delta/2})^2 \times B_\beta^1(\Omega_{\delta/2})$.

Il reste à prouver la régularité dans les secteurs tronqués $S_{\delta/2}^i$. Par theorem 2.1 et lemma 5.1 de [3], il suffit de montrer que

$$\begin{aligned}\|\underline{\overline{u}}\|_{H_\beta^{k+2,2}(S_{\delta/2}^i)} + \quad & \|p\|_{H_\beta^{k+1,1}(S_{\delta/2}^i)} \le C\Big(\|\underline{\overline{f}}\|_{H_\beta^{k,0}(S_\delta^i)} + \|h\|_{H_\beta^{k+1,1}(S_\delta^i)} \\ & + \sum_{l=0,1}\|\underline{\overline{g}}^l\|_{H_\beta^{k+\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}(\Gamma_\delta^l)} \quad + \|\underline{\overline{u}}\|_{H^{k+1}(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)} + \|p\|_{H^k(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)}\Big)\end{aligned} \tag{5.22}$$

(où $\underline{\overline{u}} = \underline{\underline{A}}\underline{u},\ \underline{\overline{f}} = \underline{\underline{A}}\underline{f},\ \underline{\overline{g}}^l = \underline{\underline{A}}\underline{g}^l,\ l = 0,1$) et que si $\underline{f} \in B_\beta^0(\Omega)^2,\ h \in B_\beta^1(\Omega),\ \underline{g}^l \in B_\beta^{\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)^2,\ l = 0,1$, alors

$$\|r^{\beta_i+\alpha_1-2}\mathcal{D}^\alpha\underline{\overline{u}}\|_{L^2(S_{\delta/2}^i)} \quad \le \quad C_i d_i{}^k k! \quad \forall|\alpha| = k+2 \tag{5.23}$$

$$\|r^{\beta_i+\alpha_1'-1}\mathcal{D}^{\alpha'}p\|_{L^2(S_{\delta/2}^i)} \quad \le \quad C_i d_i{}^k k! \quad \forall|\alpha'| = k+1 \tag{5.24}$$

pour des constantes suffisamment grandes $C_i,\ d_i$ indépendantes de $k,\ k \ge 0$.

Par induction, supposons que (5.22) est vrai jusqu'à $k-1$ et que (5.23), (5.24) sont vrais pour $|\alpha| = 2,\dots,k+1,\ |\alpha'| = 1,\dots,k$. Pour simplifier la notation, nous omettons les indices pour les coordonnées : $(r,\theta) \equiv (r_i,\theta_i)$. Posons

$$\underline{\overline{v}} := r^k\frac{\partial^k\underline{\overline{u}}}{\partial r^k}, \quad q := r^k\frac{\partial^k p}{\partial r^k}.$$

Il est facile de vérifier que

$$L\begin{pmatrix}\underline{\overline{v}}\\ q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{k-2}\frac{\partial^k}{\partial r^k}(r^2\underline{\overline{f}}) \\ r^{k-1}\frac{\partial^k}{\partial r^k}(rh)\end{pmatrix} - kr^{k-2}\begin{pmatrix} r\frac{\partial^k p}{\partial r^k} + (k-1)\frac{\partial^{k-1}p}{\partial r^{k-1}} \\ \frac{\partial^k p}{\partial r^{k-1}\partial\theta} \\ \varepsilon r\frac{\partial^{k-1}p}{\partial r^{k-1}}\end{pmatrix}$$

et

$$\underline{\overline{v}}|_{\theta=0,\omega_i} = r^k\frac{\partial^k}{\partial r^k}(\underline{\overline{G}}^0) \quad \text{si} \quad \Gamma_{i-1}\cup\Gamma_i \subset \Gamma^0,$$

$$\underline{\sigma}[\underline{\overline{v}},q]\underline{n}|_{\theta=0,\omega_i} = r^{k-1}\frac{\partial^k}{\partial r^k}(r\underline{\overline{G}}^1) + \begin{pmatrix}0\\ kr^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}p\end{pmatrix} \quad \text{si} \quad \Gamma_{i-1}\cup\Gamma_i \subset \Gamma^1,$$

$$\underline{\overline{v}}|_{\theta=0} = r^k\frac{\partial^k}{\partial r^k}(\underline{\overline{G}}^0),\ \underline{\sigma}[\underline{\overline{v}},q]\underline{n}|_{\theta=\omega_i} = r^{k-1}\frac{\partial^k}{\partial r^k}(r\underline{\overline{G}}^1) + \begin{pmatrix}0\\ kr^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}p\end{pmatrix} \quad \text{sinon.}$$

Appliquant le théorème 5.2 au sytème ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{|\alpha|=k+2\\0\le\alpha_2\le2}}\|r^{\alpha_1-2}\mathcal{D}^\alpha\underline{\overline{u}}\|_{L_\beta(S_{\delta/2}^i)} \quad & + \sum_{\substack{|\alpha'|=k+1\\0\le\alpha_2'\le1}}\|r^{\alpha_1'-1}\mathcal{D}^{\alpha'}p\|_{L_\beta(S_{\delta/2}^i)} \\ \le C\Big\{ \quad & \|r^{k-2}\tfrac{\partial^k}{\partial r^k}(r^2\underline{\overline{f}})\|_{L_\beta(S_\delta^i)} + \|r^{k-1}\tfrac{\partial^k}{\partial r^k}(rh)\|_{H_\beta^{1,1}(S_\delta^i)} \\ + \quad & k\|r^{k-2}\begin{pmatrix} r\frac{\partial^k p}{\partial r^k}+(k-1)\frac{\partial^{k-1}p}{\partial r^{k-1}} \\ \frac{\partial^k p}{\partial r^{k-1}\partial\theta}\end{pmatrix}\|_{L_\beta(S_\delta^i)} + k\|r^{k-1}\tfrac{\partial^{k-1}p}{\partial r^{k-1}}\|_{H_\beta^{1,1}(S_\delta^i)} \\ + \quad & \|r^k\tfrac{\partial^k\underline{\overline{G}}^0}{\partial r^k}\|_{H_\beta^{2,2}(S_\delta^i)} + \|r^{k-1}\tfrac{\partial^k}{\partial r^k}(r\underline{\overline{G}}^1)\|_{H_\beta^{1,1}(S_\delta^i)} \\ + \quad & \|\underline{\overline{v}}\|_{H^1(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} + \|q\|_{L^2(S_\delta\setminus S_{\delta/2})}\Big\}\end{aligned} \tag{5.25}$$

Nous allons estimer séparément chaque terme du membre de droite de (5.25) :

- $$\begin{aligned}\|r^{k-2}\frac{\partial^k}{\partial r^k}(r^2\underline{\overline{f}})\|_{L_\beta(S_\delta^i)} &\leq C\Big(\|r^k\frac{\partial^k}{\partial r^k}\underline{\overline{f}}\|_{L_\beta(S_\delta^i)} + 2k\|r^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}\underline{\overline{f}}\|_{L_\beta(S_\delta^i)} \\ &\quad + k(k-1)\|r^{k-2}\frac{\partial^{k-2}}{\partial r^{k-2}}\underline{\overline{f}}\|_{L_\beta(S_\delta^i)}\Big) \\ &\leq C\|\underline{\overline{f}}\|_{H_\beta^{k,0}(S_\delta^i)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|r^{k-2}\tfrac{\partial^k}{\partial r^k}(r^2\underline{\overline{f}})\|_{L_\beta(S_\delta^i)} &\leq \tilde{C}\big(d^k k! + 2kd^{k-1}(k-1)! + k(k-1)d^{k-2}(k-2)!\big) \\ &\leq \tilde{C}d^k k!\end{aligned}$$

si $\underline{\overline{f}} \in B_\beta^0(\Omega)^2$, et où $\tilde{C} > 0$, $d > 1$ désignent (et désigneront toujours par la suite) des constantes suffisamment grandes indépendantes de k.

- $$\begin{aligned}\|r^{k-1}\frac{\partial^k}{\partial r^k}(rh)\|_{H_\beta^{1,1}(S_\delta^i)} &\leq C\Big(\|r^k\frac{\partial^k}{\partial r^k}h\|_{L^2(S_\delta^i)} + k\|r^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}h\|_{L^2(S_\delta^i)} \\ &\quad + \|\frac{\partial}{\partial r}(r^k\frac{\partial^k}{\partial r^k}h)\|_{L_\beta(S_\delta^i)} + k\|\frac{\partial}{\partial r}(r^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}h)\|_{L_\beta(S_\delta^i)} \\ &\quad + \|r^{k-1}\frac{\partial^{k+1}}{\partial r^k\partial\theta}h\|_{L_\beta(S_\delta^i)} + k\|r^{k-2}\frac{\partial^k}{\partial r^{k-1}\partial\theta}h\|_{L_\beta(S_\delta^i)}\Big) \\ &\leq C\|h\|_{H_\beta^{k+1,1}(S_\delta^i)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|r^{k-1}\tfrac{\partial^k}{\partial r^k}(rh)\|_{H_\beta^{1,1}(S_\delta^i)} &\leq \tilde{C}\big(d^{k-1}(k-1)! + kd^{k-2}(k-2)! + d^k k! + kd^{k-1}(k-1)! \\ &\quad + kd^{k-1}(k-1)! + k(k-1)d^{k-2}(k-2)! + d^k k! + kd^{k-1}(k-1)!\big) \\ &\leq \tilde{C}d^k k!\end{aligned}$$

si $h \in B_\beta^1(\Omega)$. De manière analogue, il est facile de vérifier que

- $\|r^k\frac{\partial^k\underline{\overline{G}}^0}{\partial r^k}\|_{H_\beta^{2,2}(S_\delta^i)} \leq C\|\underline{\overline{G}}^0\|_{H_\beta^{k+2,2}(S_\delta^i)}$ et $\|r^k\frac{\partial^k\underline{\overline{G}}^0}{\partial r^k}\|_{H_\beta^{2,2}(S_\delta^i)} \leq \tilde{C}d^k k!$ si $\underline{\overline{G}}^0 \in B_\beta^2(\Omega)^2$,

ainsi que

- $\|r^{k-1}\frac{\partial^k}{\partial r^k}(r\underline{\overline{G}}^1)\|_{H_\beta^{1,1}(S_\delta^i)} \leq C\|\underline{\overline{G}}^1\|_{H_\beta^{k+1,1}(S_\delta^i)}$ et $\|r^{k-1}\frac{\partial^k}{\partial r^k}(r\underline{\overline{G}}^1)\|_{H_\beta^{1,1}(S_\delta^i)} \leq \tilde{C}d^k k!$ si $\underline{\overline{G}}^1 \in B_\beta^1(\Omega)^2$.

Nous avons ensuite

$$\bullet \quad k\|r^{k-2}\begin{pmatrix} r\frac{\partial^k p}{\partial r^k} + (k-1)\frac{\partial^{k-1}p}{\partial r^{k-1}} \\ \frac{\partial^k p}{\partial r^{k-1}\partial\theta} \end{pmatrix}\|_{L_\beta(S_\delta^i)} \leq C\|p\|_{H_\beta^{k,1}(S_\delta^i)}$$

$$\leq C\big(\|\underline{\overline{f}}\|_{H_\beta^{k-1,0}(S_\delta^i)} + \|h\|_{H_\beta^{k,1}(S_\delta^i)} + \sum_{l=0,1}\|\underline{\overline{g}}^l\|_{H_\beta^{k-1+\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}(\Gamma_\delta^l)}$$

$$+ \|\underline{\overline{u}}\|_{H^k(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)} + \|p\|_{H^{k-1}(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)}\big)$$

$$\leq C\big(\|\underline{\overline{f}}\|_{H_\beta^{k,0}(S_\delta^i)} + \|h\|_{H_\beta^{k+1,1}(S_\delta^i)} + \sum_{l=0,1}\|\underline{\overline{g}}^l\|_{H_\beta^{k+\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}(\Gamma_\delta^l)}$$

$$+ \|\underline{\overline{u}}\|_{H^{k+1}(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)} + \|p\|_{H^k(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)}\big)$$

par hypothèse d'induction, et

$$k\|r^{k-2}\begin{pmatrix} r\frac{\partial^k p}{\partial r^k} + (k-1)\frac{\partial^{k-1}p}{\partial r^{k-1}} \\ \frac{\partial^k p}{\partial r^{k-1}\partial\theta} \end{pmatrix}\|_{L_\beta(S_\delta^i)} \leq \tilde{C}\big(kd^{k-1}(k-1)! + k(k-1)d^{k-2}(k-2)!\big) \leq \tilde{C}d^k k!$$

si $\underline{f} \in B_\beta^0(\Omega)^2$, $h \in B_\beta^1(\Omega)$, $\underline{g}^l \in B_\beta^{\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)^2$, $l = 0,1$, où nous avons également utilisé l'hypothèse d'induction. De même,

$$\bullet \quad k\|r^{k-1}\frac{\partial^{k-1}p}{\partial r^{k-1}}\|_{H_\beta^{1,1}(S_\delta^i)} \leq C\Big(\|\underline{\overline{f}}\|_{H_\beta^{k,0}(S_\delta^i)} + \|h\|_{H_\beta^{k+1,1}(S_\delta^i)} + \sum_{l=0,1}\|\underline{\overline{g}}^l\|_{H_\beta^{k+\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}(\Gamma_\delta^l)}$$

$$+ \|\underline{\overline{u}}\|_{H^{k+1}(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)} + \|p\|_{H^k(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)}\Big)$$

et

$$k\|r^{k-1}\frac{\partial^{k-1}p}{\partial r^{k-1}}\|_{H_\beta^{1,1}(S_\delta^i)} \leq \tilde{C}d^k k!$$

si $\underline{f} \in B_\beta^0(\Omega)^2$, $h \in B_\beta^1(\Omega)$, $\underline{g}^l \in B_\beta^{\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)^2$, $l = 0,1$.
Finalement

$$\bullet \quad \|\underline{\overline{v}}\|_{H^1(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} + \|q\|_{L^2(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} \leq C\big(\|\underline{\overline{u}}\|_{H^{k+1}(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)} + \|p\|_{H^k(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)}\big)$$

et, si $\underline{f} \in B_\beta^0(\Omega)^2$, $h \in B_\beta^1(\Omega)$, $\underline{g}^l \in B_\beta^{\frac{3}{2}-l}(\Gamma^l)^2$, $l = 0,1$,

$$\begin{aligned} \|\underline{\overline{v}}\|_{H^1(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} + \|q\|_{L^2(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} &\leq \tilde{C}\Big(k\|\frac{\partial^k\underline{\overline{u}}}{\partial r^k}\|_{L^2(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} + \|\frac{\partial^{k+1}\underline{\overline{u}}}{\partial r^{k+1}}\|_{L^2(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} \\ &\quad + \|\frac{1}{r}\frac{\partial^{k+1}\underline{\overline{u}}}{\partial\theta\partial r^k}\|_{L^2(S_\delta\setminus S_{\delta/2})} + \|\frac{\partial^k p}{\partial r^k}\|_{L^2(S_\delta\setminus S_{\delta/2})}\Big) \\ &\leq \tilde{C}d^k k! \end{aligned}$$

par régularité intérieure.

Ainsi, nous avons montré

$$\begin{aligned} \|r^{\alpha_1-2}\mathcal{D}^\alpha\underline{\overline{u}}\|_{L_\beta(S_{\delta/2}^i)} &+ \|r^{\alpha_1'-1}\mathcal{D}^{\alpha'}p\|_{L_\beta(S_{\delta/2}^i)} \leq C\Big(\|\underline{\overline{f}}\|_{H_\beta^{k,0}(S_\delta^i)} + \|h\|_{H_\beta^{k+1,1}(S_\delta^i)} \\ &+ \sum_{l=0,1}\|\underline{\overline{g}}^l\|_{H_\beta^{k+\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}(\Gamma_\delta^l)} + \|\underline{\overline{u}}\|_{H^{k+1}(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)} + \|p\|_{H^k(S_\delta^i\setminus S_{\delta/2}^i)}\Big) \end{aligned} \tag{5.26}$$

et (5.23), (5.24) pour $|\alpha| = k+2$, $0 \leq \alpha_2 \leq 2$, $|\alpha'| = k+1, 0 \leq \alpha_2 \leq 1$.
Pour $\alpha_2 > 2$, $\alpha_2' > 1$, nous redéfinissons

$$\underline{\overline{v}} := r^{k-l}\frac{\partial^k\underline{\overline{u}}}{\partial r^{k-l}\partial\theta^l}, \quad q := r^{k-l}\frac{\partial^k p}{\partial r^{k-l}\partial\theta^l}, \quad 2 \leq l \leq k.$$

Suivant le même raisonnement que précédemment, plus exactement effectuant les substitutions

$$k \leftrightarrow k-l,\ \underline{\overline{u}} \leftrightarrow \frac{\partial^l \underline{\overline{u}}}{\partial \theta^l},\ p \leftrightarrow \frac{\partial^l p}{\partial \theta^l},\ \underline{\overline{f}} \leftrightarrow \frac{\partial^l \underline{\overline{f}}}{\partial \theta^l},\ h \leftrightarrow \frac{\partial^l h}{\partial \theta^l},\ \underline{\overline{G}}^m \leftrightarrow \frac{\partial^l \underline{\overline{G}}^m}{\partial \theta^l},\ m=0,1$$

dans les calculs qui précèdent, nous obtenons

$$\sum_{\substack{|\alpha|=k+2\\ l\le\alpha_2\le l+2}} \|r^{\alpha_1-2}\mathcal{D}^\alpha \underline{\overline{u}}\|_{L_\beta(S^i_{\delta/2})} + \sum_{\substack{|\alpha'|=k+1\\ l\le\alpha'_2\le l+1}} \|r^{\alpha'_1-1}\mathcal{D}^{\alpha'} p\|_{L_\beta(S^i_{\delta/2})} \le C\Big(\|\underline{\overline{f}}\|_{H^{k,0}_\beta(S^i_\delta)} + \|h\|_{H^{k+1,1}_\beta(S^i_\delta)}$$
$$+ \sum_{l=0,1} \|\underline{\overline{g}}^l\|_{H^{k+\frac{3}{2}-l,\frac{3}{2}-l}_\beta(\Gamma^l_\delta)} + \|\underline{\overline{u}}\|_{H^{k+1}(S^i_\delta\setminus S^i_{\delta/2})} + \|p\|_{H^k(S^i_\delta\setminus S^i_{\delta/2})}\Big)$$

et (5.23), (5.24) sont valables $\forall|\alpha|=k+2,\ l\le\alpha_2\le l+2,\ |\alpha'|=k+1,\ l\le\alpha'_2\le l+1$.

Par conséquent, nous avons (5.22),(5.23), (5.24) pour tout $|\alpha|=k+2,\ |\alpha'|=k+1$, et le théorème est démontré. □

Références

[1] I. Babuska and B.Q. Guo : the hp version of the finite element method for problems with non-homogeneous essential boundary condition. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 74*, 1989, 1-18.

[2] B.Q. Guo and Ch. Schwab : Analytic regularity of Stokes flow in polygonal domains, Re. Report 2000-18, December 2000, SAM, ETH Zürich.

[3] B.G Guo and I. Babuska : On the regularity of elasticity problems with piecewise analytic data. *Adv. Appl. Math.,14*, 1993, 307-347.

[4] V.A. Kondratev : Boundary value problem for elliptic equations in domain with cornic or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1967, 227-313.

[5] V.A. Kondratev : Boundary value problem for parabolic equations in closed domains. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1966, 450-504.

[6] V.A. Kondratev and O.A. Oleinik : Boundary value problems for partial differential equations in nonsmooth domains. *Russian Math. Surveys,38-2*,1983,1-86.

[7] I. Babuska and B.Q. Guo : Regularity of the solution of elliptic problems with piecewise analytic data. Part 1. Boundary value problems for linear elliptic equation of second order. *SIAM J. Math. Anal., 19*, 1988, 172-203.

[8] V. Girault and P.A. Raviart : Finite element methods for Navier-Stokes equations. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[9] F.Brezzi : On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *RAIRO,8*, 1994, 129-151.

[10] M.S. Agranovich and M.K. Vishik : Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. *Russian Math. Surveys, 19, No. 3*, 1964, 53-157.

[11] I. Babuska and B.Q. Guo : Regularity of the solution of elliptic problems with piecewise analytic data. Part 2. The trace spaces and application to boundary value problems with non-homogeneous conditions. *SIAM J. Math. Anal., 20*, 1989, 763-781.

[12] C.B.Morrey : Multiple integrals in calculus of variations. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/New York, 1966.