ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Berichte über Mathematik und Unterricht
Herausgeber: U. Kirchgraber

Bericht No. 89-04
Januar1990

Theorem von Sarkovskii

von Moritz Adelmeyer, Wila

Eidgenössische Technische Hochschule
CH – 8092 Zürich

Theorem von Sarkovskii

Moritz Adelmeyer 9.12.89

Vorwort

Diese Arbeit präsentiert einen detailliert ausgearbeiteten Beweis des Theorems von Sarkovskii über die Koexistenz periodischer Punkte in stetigen Abbildungen der reellen Achse. Es sei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ eine stetige Abbildung. f besitze einen Punkt der Periode n, das heisst es gibt ein $x^*\in\mathbf{R}$ mit $f^n(x^*)=x^*$ und $f^j(x^*)\neq x^*$ für $j=1,\dots,n-1$. Hat dann f notwendigerweise noch weitere periodische Punkte mit Perioden $m\neq n$? Das Theorem von Sarkovskii beantwortet diese Frage vollständig. Es sei $\rhd$ die folgende Ordnung auf $\mathbf{N}$: $3 \rhd 5 \rhd \dots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd \dots \rhd 2^2\cdot 3 \rhd 2^2\cdot 5 \rhd \dots \rhd 2^3\cdot 3 \rhd 2^3\cdot 5 \rhd \dots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$. Das Theorem von Sarkovskii besagt nun, dass f unter obigen Voraussetzungen notwendigerweise auch Punkte der Periode m für alle m mit $n \rhd m$ besitzt.

Diese Arbeit ist Teil der Diplomarbeit, die der Autor an der Abteilung IX für Mathematik und Physik der ETH Zürich unter Leitung von Prof. Urs Kirchgraber anfertigte.

Periodische Punkte

Bezeichnungen: Es sei $\mathbf{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbf{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ eine stetige Abbildung. Für jedes $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 1$, sei $f^n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ die **n-fach Iterierte** von f, definiert durch $f^1=f$ und $f^{n+1}=f\circ f^n$ für alle $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 1$. Aus der Stetigkeit von f folgt die Stetigkeit von f^n für alle $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 1$. Zusätzlich definieren wir f^0 als identische Abbildung auf $\mathbf{R}$. Für jedes $x^*\in\mathbf{R}$ heisst $\{f^n(x^*) \mid n\in\mathbf{N}\}$ **Bahn** von x^* unter f.

Definition: Es sei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ eine stetige Abbildung, $x^*\in\mathbf{R}$ und $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 1$. x^* heisst **n-periodischer Punkt** von f, wenn $f^n(x^*)=x^*$ und $f^j(x^*)\neq x^*$ für $j=1,\dots,n-1$.

Bezeichnung: Wenn x^* ein n-periodischer Punkt von f ist, dann schreiben wir dafür $P(x^*,f)=n$.

Proposition I: Es sei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ eine stetige Abbildung, $x^*\in\mathbf{R}$ und $m\in\mathbf{N}$, $m\geq 1$ mit $f^m(x^*)=x^*$. Dann ist x^* ein periodischer Punkt von f mit $P(x^*,f) \mid m$.

Beweis: Es sei $J=\{j\in\mathbf{N} \mid j\geq 1 \text{ und } f^j(x^*)=x^*\}$. $J\neq\emptyset$. Es sei $n=\min J$. Es gilt $f^n(x^*)=x^*$ und $f^j(x^*)\neq x^*$ für $j=1,\dots,n-1$. x^* ist ein periodischer Punkt von f mit $P(x^*,f)=n$.
Jedenfalls ist $n\leq m$. Es gibt $p,q\in\mathbf{N}$, $p\geq 1$, $0\leq q\leq n-1$, mit $m=pn+q$. Die Annahme $1\leq q\leq n-1$ führt wegen $x^*=f^m(x^*)=f^{pn+q}(x^*)=f^q(f^{pn}(x^*))=f^q((f^n)^p(x^*))=f^q(x^*)\neq x^*$ zu einem Widerspruch. Es ist also $q=0$ und damit $P(x^*,f) \mid m$. □

Proposition II: Es sei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ eine stetige Abbildung, $x^*\in\mathbf{R}$ und $m\in\mathbf{N}$, $m\geq 1$. x^* ist dann und nur dann ein periodischer Punkt von f, wenn x^* ein periodischer Punkt von f^m ist. Zudem ist dann $P(x^*,f^m)=P(x^*,f)/ggT(P(x^*,f),m)$.

Beweis: Es sei zunächst x^* ein periodischer Punkt von f. Wegen $(f^m)^{P(x^*,f)/ggT(P(x^*,f),m)}(x^*)=(f^{P(x^*,f)})^{m/ggT(P(x^*,f),m)}(x^*)=x^*$ und Proposition I ist x^* ein periodischer Punkt von f^m mit $P(x^*,f^m) \mid P(x^*,f)/ggT(P(x^*,f),m)$ (*).

Es sei nun x^* ein periodischer Punkt von f^m. Wegen $f^{m\cdot P(x^*,f^m)}(x^*)=(f^m)^{P(x^*,f^m)}(x^*)=x^*$ und Proposition I ist x^* ein periodischer Punkt von f mit $P(x^*,f) \mid m\cdot P(x^*,f^m)$. Dann gilt auch $P(x^*,f)/ggT(P(x^*,f),m) \mid m\cdot P(x^*,f^m)$. $P(x^*,f)/ggT(P(x^*,f),m)$ und m sind teilerfremd. Dies impliziert $P(x^*,f)/ggT(P(x^*,f),m) \mid P(x^*,f^m)$ (**).
(*) und (**) implizieren zusammen $P(x^*,f^m)=P(x^*,f)/ggT(P(x^*,f),m)$. □

f-Ueberdeckungen

In diesem Abschnitt wird eine Methode aufgezeigt zum Nachweis periodischer Punkte in stetigen Abbildungen der reellen Achse. Eine zentrale Position nimmt dabei das Zwischenwerttheorem ein:

Proposition III (Zwischenwerttheorem): Es sei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ eine stetige Abbildung und $x',x''\in\mathbf{R}$ mit $x'\leq x''$ und $f(x')\leq f(x'')$. Dann gibt es zu jedem $y^*\in\mathbf{R}$ mit $f(x')\leq y^*\leq f(x'')$ ein $x^*\in\mathbf{R}$ mit $x'\leq x^*\leq x''$ und $f(x^*)=y^*$. Es gilt also $f([x',x''])\supseteq[f(x'),f(x'')]$.

Beweis: Es sei $K=\{x\in[x',x''] \mid f(x)\leq y^*\}$. K ist nichtleer, beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Es sei $x^*=\max K$. Einerseits ist $x^*\in K$ und damit $f(x^*)\leq y^*$, andererseits ist $f(x)>y^*$ für alle $x>x^*$ und damit $f(x^*)=\lim_{x\downarrow x^*} f(x)\geq y^*$. Zusammmen ergibt dies $f(x^*)=y^*$. □

Bezeichnung: Ein Teilmenge I von **R** heisst ein **Intervall**, wenn I <u>nichtleer</u> ist und wenn für alle $x',x''\in I$ und $x\in\mathbf{R}$ mit $x'<x<x''$ gilt $x\in I$. Aus Proposition III folgt unter anderem, dass das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Abbildung wiederum ein Intervall ist. Im folgenden treten durchwegs abgeschlossene und beschränkte, das heisst kompakte Intervalle auf. Da das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildungen wiederum kompakt ist, ist also das Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Abbildung wiederum ein kompaktes Intervall.

Definition: Es sei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ eine stetige Abbildung und I, J kompakte Intervalle. I heisst ***f*-Ueberdeckung** von J, wenn $f(I)\supseteq J$.

Proposition IV: Es sei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ eine stetige Abbildung und I, J kompakte Intervalle mit $f(I)\supseteq J$. Dann gibt es ein kompaktes Teilintervall K von I mit $f(K)=J$.

Beweis: Es gibt $\bar{x},\bar{\bar{x}}\in I$ mit $J=[f(\bar{x}),f(\bar{\bar{x}})]$. Ohne Verlust an Allgemeinheit nehmen wir an, dass $\bar{x}\leq\bar{\bar{x}}$. Es sei $K'=\{x\in[\bar{x},\bar{\bar{x}}] \mid f(x)=f(\bar{x})\}$. K' ist nichtleer und kompakt. Es sei $x'=\max K'$. Im weiteren sei $K''=\{x\in[x',\bar{\bar{x}}] \mid f(x)=f(\bar{\bar{x}})\}$. K'' ist nichtleer und kompakt. Es sei $x''=\min K''$ und $K=[x',x'']$. K ist ein kompaktes Teilintervall von I mit $f(K)=J$ (Proposition III anwenden). □

Proposition V: Es sei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ eine stetige Abbildung und $(J_j)_{j\in\mathbf{N}}$ eine Folge kompakter Intervalle mit $f(J_j)\supseteq J_{j+1}$ für alle $j\in\mathbf{N}$. Dann gibt es eine Folge $(K_j)_{j\in\mathbf{N}}$ kompakter Teilintervalle von J_0 mit $K_{j+1}\subseteq K_j$ und $f^j(K_j)=J_j$ für alle $j\in\mathbf{N}$. Für jedes $x^*\in K=\bigcap_{j\in\mathbf{N}}K_j$ gilt $f^j(x^*)\in J_j$ für alle $j\in\mathbf{N}$.

Beweis: Wir konstruieren rekursiv eine Folge $(K_j)_{j\in\mathbf{N}}$ kompakter Teilintervalle von J_0 mit $K_{j+1}\subseteq K_j$ und $f^j(K_j)=J_j$ für alle $j\in\mathbf{N}$. Es sei $K_0=J_0$. Es ist $f^0(K_0)=K_0=J_0$. Es seien nun $K_0,\ldots,K_j$ konstruiert. Es ist $f^{j+1}(K_j)=f(f^j(K_j))=f(J_j)\supseteq J_{j+1}$. Wegen Proposition IV (angewandt auf f^{j+1}) gibt es ein kompaktes Intervall $K_{j+1}\subseteq K_j\subseteq J_0$ mit $f^{j+1}(K_{j+1})=J_{j+1}$. Es sei $K=\bigcap_{j\in\mathbf{N}}K_j$. K ist ein kompaktes Intervall. Für jedes $x^*\in K=\bigcap_{j\in\mathbf{N}}K_j$ gilt $f^j(x^*)\in f^j(K_j)=J_j$ für alle $j\in\mathbf{N}$. □

Proposition VI (Fixpunkttheorem): Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung und J ein kompaktes Intervall mit $f(J)\supseteq J$. Dann gibt es ein $x^*\in J$ mit $f(x^*)=x^*$.

Beweis: Es gibt $x',x''\in J$ mit $J=[f(x'),f(x'')]$. Es ist entweder $f(x')\leq x'\leq x''\leq f(x'')$ oder $f(x')\leq x''\leq x'\leq f(x'')$. Ohne Verlust an Allgemeinheit nehmen wir ersteres an. Es sei $F(x)=f(x)-x$ für alle $x\in$ **R**. F: **R**->**R** ist eine stetige Abbildung mit $F(x')\leq 0$ und $F(x'')\geq 0$. Aufgrund von Proposition III gibt es ein $x^*\in [x',x'']\subseteq J$ mit $F(x^*)=f(x^*)-x^*=0$. □

Proposition VII: Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung und $I_0,I_1,\ldots,I_{n-1}$ kompakte Intervalle mit $f(I_j)\supseteq I_{j+1}$ für $j=0,\ldots,n-2$ und $f(I_{n-1})\supseteq I_0$. Dann gibt es ein $x^*\in I_0$ mit $f^n(x^*)=x^*$ und $f^j(x^*)\in I_j$ für $j=1,\ldots,n-1$.

Beweis: Es sei $J_{pn+q}=I_q$ für jedes $p\geq 0$ und $q=0,\ldots,n-1$. $(J_j)_{j\in \mathbf{N}}$ ist eine Folge kompakter Intervalle mit $f(J_j)\supseteq J_{j+1}$ für alle $j\in$ **N**. Wegen Proposition V gibt es eine Folge $(K_j)_{j\in \mathbf{N}}$ kompakter Teilintervalle von $J_0=I_0$ mit $K_{j+1}\subseteq K_j$ und $f^j(K_j)=J_j$ für alle $j\in$ **N**. Es ist $f^n(K_n)=J_n=I_0\supseteq K_n$. Wegen Proposition VI (angewandt auf f^n) gibt es ein $x^*\in K_n\subseteq I_0$ mit $f^n(x^*)=x^*$. Wegen $x^*\in K_n\subseteq K_{n-1}\subseteq\ldots\subseteq K_1$ ist zudem $f^j(x^*)\in f^j(K_j)=J_j=I_j$ für $j=1,\ldots,n-1$. □

Das Theorem

Es sei $\rhd$ die folgende Ordnung auf **N**:

$$\begin{array}{ccccccccc}
3 & \rhd & 5 & \rhd & 7 & \rhd & 9 & \rhd & \ldots\ldots \\
2\cdot 3 & \rhd & 2\cdot 5 & \rhd & 2\cdot 7 & \rhd & 2\cdot 9 & \rhd & \ldots\ldots \\
2^2\cdot 3 & \rhd & 2^2\cdot 5 & \rhd & 2^2\cdot 7 & \rhd & 2^2\cdot 9 & \rhd & \ldots\ldots \\
2^3\cdot 3 & \rhd & 2^3\cdot 5 & \rhd & 2^3\cdot 7 & \rhd & 2^3\cdot 9 & \rhd & \ldots\ldots \\
\multicolumn{9}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
\multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & \rhd & 2^3 & \rhd & 2^2 \rhd 2 \rhd 1\,.
\end{array}$$

Theorem VIII (Sarkovskii): Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung mit einem n-periodischen Punkt für ein $n\in$ **N**, $n\geq 1$. Dann besitzt f auch einen m-periodischen Punkt für jedes $m\in$ **N**, $m\geq 1$ mit $n \rhd m$.

Der **Beweis** von Theorem VIII besteht aus den folgenden Teilen:

- Periode $n>1$ => Periode 1
- Periode $n>2$ => Periode 2
- Periode 2^{n+1} mit $n\geq 0$ => Periode 2^n
- ungerade Periode $n>1$ => Perioden $m>n$ und gerade Perioden $m<n$
- Periode $p\cdot 2^n$ mit ungeradem $p>1$ und $n\geq 1$ => Periode $(p+2)\cdot 2^n$
- Periode $p\cdot 2^n$ mit ungeradem $p>1$ und $n\geq 1$ => Periode $3\cdot 2^{n+1}$
- Periode $p\cdot 2^n$ mit ungeradem $p>1$ und $n\geq 1$ => Perioden 2^m mit $m\geq 2$.

Bezeichnungen: Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung mit einem n-periodischen Punkt x^* für ein $n\in$ **N**, $n\geq 2$. Die Bahn von x^* besteht dann aus den Punkten $x^*,f(x^*),\ldots,f^{n-1}(x^*)$. Wir bezeichnen diese Punkte mit $x_0,\ldots,x_{n-1}$, wobei die Numerierung derart vorgenommen wird, dass $x_i<x_j$ für $0\leq i<j\leq n-1$.
Die Bahnpunkte unterteilen das Intervall $[x_0,x_{n-1}]$ in n-1 Intervalle der Form $[x_j,x_{j+1}]$ mit $0\leq j\leq n-2$. Wir bezeichnen disese Intervalle im folgenden als **Teilungsintervalle**.

Proposition IX: Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung mit einem n-periodischen Punkt für ein n>1. Dann hat f auch einen 1-periodischen Punkt.

Beweis: f permutiert $x_0,\dots,x_{n-1}$. Insbesondere ist $f(x_0)>x_0$ und $f(x_{n-1})<x_{n-1}$. Es gibt daher ein maximales m, $0\le m\le n-2$ mit $f(x_m)>x_m$. Nach Konstruktion ist $f(x_m)\ge x_{m+1}$ und $f(x_{m+1})\le x_m$. Proposition III impliziert $f([x_m,x_{m+1}])\supseteq[f(x_{m+1}),f(x_m)]\supseteq[x_m,x_{m+1}]$. Nach Proposition VI gibt es ein $x^*\in[x_m,x_{m+1}]$ mit $P(x^*,f)=1$.

Proposition X: Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung mit einem n-periodischen Punkt für ein n>2. Dann hat f auch einen 2-periodischen Punkt.

Beweis: Ohne Verlust an Allgemeinheit können wir annehmen, dass n die kleinste Periode > 2 von f ist.

(i) Zu jedem Teilungsintervall I gibt es ein Teilungsintervall J, $J\ne I$, mit $f(I)\supseteq J$.

□ Es sei $I=[x_i,x_{i+1}]$ für ein i, $0\le i\le n-2$. Es ist $f(x_i)=x_j$ für ein j, $0\le j\le n-1$, $j\ne i$. Entweder ist $x_j<x_i$ oder $x_j>x_i$. Im weiteren ist entweder $f(x_{i+1})<x_j$ oder $f(x_{i+1})>x_j$. Wenn $x_j=x_{i+1}$ ist, dann ist $f(x_{i+1})\ne x_i$, da andernfalls x_i bezüglich f ein Punkt mit Perode 2<n wäre.

Nehmen wir an, dass $x_j<x_i$ und $f(x_{i+1})<x_j$. Dann sei $J=[x_{j-1},x_j]$. J ist ein Teilungsintervall verschieden von I. Nach Proposition III gilt $f(I)=f([x_i,x_{i+1}])\supseteq[f(x_{i+1}),f(x_i)]\supseteq[x_{j-1},x_j]=J$.

Nehmen wir an, dass $x_j<x_i$ und $f(x_{i+1})>x_j$. Dann sei $J=[x_j,x_{j+1}]$. J ist ein Teilungsintervall verschieden von I. Nach Proposition III gilt $f(I)=f([x_i,x_{i+1}])\supseteq[f(x_i),f(x_{i+1})]\supseteq[x_j,x_{j+1}]=J$.

Nehmen wir an, dass $x_j>x_i$ und $f(x_{i+1})<x_j$. Dann sei $J=[x_{j-1},x_j]$ im Falle j>i+1 und $J=[x_{i-1},x_i]$ im Falle j=i+1. J ist ein Teilungsintervall verschieden von I. Nach Proposition III gilt $f(I)=f([x_i,x_{i+1}])\supseteq[f(x_{i+1}),f(x_i)]\supseteq[x_{j-1},x_j]=J$ für j>i+1 und $f(I)=f([x_i,x_{i+1}])\supseteq[f(x_{i+1}),f(x_i)]\supseteq[x_{i-1},x_i]=J$ für j=i+1.

Nehmen wir an, dass $x_j>x_i$ und $f(x_{i+1})>x_j$. Dann sei $J=[x_j,x_{j+1}]$. J ist ein Teilungsintervall verschieden von I. Nach Proposition III gilt $f(I)=f([x_i,x_{i+1}])\supseteq[f(x_i),f(x_{i+1})]\supseteq[x_j,x_{j+1}]=J$. □

(ii) Es gibt paarweise verschiedene Teilungsintervalle $I_0,\dots,I_{m-1}$ mit $2\le m\le n-1$, $f(I_j)\supseteq I_{j+1}$ für $j=0,\dots,m-2$ und $f(I_{m-1})\supseteq I_0$.

□ Es sei $j_0=0$. Wegen (i) gibt es ein j_1, $0\le j_1\le n-2$, $j_1\ne j_0$, mit $f([x_{j_1},x_{j_1+1}])\supseteq[x_{j_0},x_{j_0+1}]$. Analog gibt es ein j_2, $0\le j_2\le n-2$, $j_2\ne j_1$, mit $f([x_{j_1},x_{j_1+1}])\supseteq[x_{j_2},x_{j_2+1}]$. Wenn $j_2=j_0$ ist, dann trifft (ii) für $I_0=[x_{j_0},x_{j_0+1}]$ und $I_1=[x_{j_1},x_{j_1+1}]$ zu. Wenn $j_2\ne j_0$ ist, dann gibt es wegen (i) ein j_3, $0\le j_3\le n-2$, $j_3\ne j_2$, mit $f([x_{j_2},x_{j_2+1}])\supseteq[x_{j_3},x_{j_3+1}]$. Wenn $j_3=j_0$ ist, dann trifft (ii) für $I_0=[x_{j_0},x_{j_0+1}]$, $I_1=[x_{j_1},x_{j_1+1}]$ und $I_2=[x_{j_2},x_{j_2+1}]$ zu. Wenn $j_3=j_1$ ist, dann trifft (ii) für $I_0=[x_{j_1},x_{j_1+1}]$ und $I_1=[x_{j_2},x_{j_2+1}]$ zu. Usw. . Dieses Verfahren ergibt spätestens nach der Wahl eines j_{n-1}, $0\le j_{n-1}\le n-2$, $j_{n-1}\ne j_{n-2}$, mit $f([x_{j_{n-2}},x_{j_{n-2}+1}])\supseteq[x_{j_{n-1}},x_{j_{n-1}+1}]$) das in (ii) postulierte Resultat. □

Wegen (ii) und Proposition VII gibt es ein $x^*\in I_0$ mit $f^m(x^*)=x^*$. Nach Proposition I ist $P(x^*,f)\le m$. Wegen m<n und der Tatsache, dass n die kleinste Periode > 2 von f ist, muss $P(x^*,f)$ gleich 1 oder 2 sein. Nehmen wir an, dass $P(x^*,f)=1$. Dann wäre nach Proposition VII $x^*=f(x^*)\in I_0\cap I_1$. $I_0\cap I_1$ besteht aber höchstens aus einem der Punkte $x_0,\dots,x_{n-1}$ und diese haben bezüglich f die Periode n>1. Es ist also $P(x^*,f)=2$. □

Proposition XI: Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung mit einem 2^{n+1}-periodischen Punkt für ein $n \in \mathbf{N}$. Dann hat f auch einen 2^n-periodischen Punkt.

Beweis (Induktion nach n): Für n=0 folgt Proposition XI aus Proposition IX, für n=1 aus Proposition X.
Nehmen wir nun an, dass Proposition XI für ein $n \geq 1$ zutrifft. Es sei $x^* \in \mathbf{R}$ mit $P(x^*,f)=2^{n+2}$. Nach Proposition II ist $P(x^*,f^2)=2^{n+2}/2=2^{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung (angewandt auf f^2) gibt es ein $\hat{x} \in \mathbf{R}$ mit $P(\hat{x},f^2)=2^n$. Nach Proposition II ist $P(\hat{x},f)=2^n \cdot ggT(P(\hat{x},f),2)$. Wegen $n \geq 1$ ist $P(\hat{x},f)$ durch 2 teilbar und damit $ggT(P(\hat{x},f),2)=2$. Dies impliziert $P(\hat{x},f)=2^{n+1}$. □

Proposition XII: Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung mit einem n-periodischen Punkt für ein ungerades $n>1$ und ohne k-periodischen Punkt für ungerades k, $1<k<n$. Dann können die Teilungsintervalle $I_0,\ldots,I_{n-2}$ derart numeriert werden, dass $f(I_0) \supseteq I_0$, $f(I_j) \supseteq I_{j+1}$ für $j=0,\ldots,n-3$ und $f(I_{n-2}) \supseteq I_j$ für jedes gerade j, $0 \leq j < n-2$.

Beweis: f permutiert $x_0,\ldots,x_{n-1}$. Insbesondere ist $f(x_0)>x_0$ und $f(x_{n-1})<x_{n-1}$. Es gibt daher ein maximales m, $0 \leq m \leq n-2$ mit $f(x_m)>x_m$. Es sei

(i) $I_0=[x_m,x_{m+1}]$.

Nach Konstruktion ist $f(x_m) \geq x_{m+1}$ und $f(x_{m+1}) \leq x_m$. Proposition III impliziert

(ii) $f(I_0)=f([x_m,x_{m+1}]) \supseteq [f(x_{m+1}),f(x_m)] \supseteq [x_m,x_{m+1}]=I_0$.

Aus (ii) bekommen wir induktiv

(iii) $f^{j+1}(I_0) \supseteq f^j(I_0)$ für jedes $j \in \mathbf{N}$.

(iv) $f^{n-2}(I_0) \supseteq [x_0,x_{n-1}]$

□ Wegen (iii) gilt $f^{n-2}(I_0) \supseteq \ldots \supseteq f(I_0) \supseteq I_0$ und damit $f^{n-2}(I_0) \supseteq \{x_m,f(x_m),\ldots,f^{n-2}(x_m)\} \cup \{x_{m+1}, f(x_{m+1}),\ldots,f^{n-2}(x_{m+1})\}$. Da f $x_0,\ldots,x_{n-1}$ permutiert, gibt es ein j, $1 \leq j \leq n-1$, mit $x_{m+1}=f^j(x_m)$. Aus $f^{n-j-1}(x_{m+1})=f^{n-j-1}(f^j(x_m)) = f^{n-1}(x_m)$ und $0 \leq n-j-1 \leq n-2$ folgt $f^{n-1}(x_m) \in f^{n-2}(I_0)$. Daraus folgt $f^{n-2}(I_0) \supseteq \{x_m,f(x_m),\ldots,f^{n-2}(x_m),f^{n-1}(x_m)\}=\{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$. Da $f^{n-2}(I_0)$ ein Intervall ist, folgt daraus $f^{n-2}(I_0) \supseteq [x_0,x_{n-1}]$. □

Wegen (iii) und (iv) gibt es zu jedem Teilungsintervall K eine kleinste Zahl $k \in \{0,\ldots,n-2\}$ mit $K \subseteq f^k(I_0)$. Wir nennen dieses k **Index** von K.

(v) Es gibt ein Teilungsintervall K, $K \neq I_0$, mit $f(K) \supseteq I_0$

□ Weil n ungerade ist gilt $|\{x_0,\ldots,x_m\}| \neq |\{x_{m+1},\ldots,x_{n-1}\}|$. Ohne Verlust an Allgemeinheit nehmen wir an, dass $|\{x_0,\ldots,x_m\}| > |\{x_{m+1},\ldots,x_{n-1}\}|$. Für x_m gilt $f(x_m) \geq x_{m+1}$. Wegen der getroffenen Annahme kann nicht $f(x_j) \geq x_{m+1}$ sein für alle $j=0,\ldots,m$. Es gibt daher ein maximales j, $0 \leq j \leq m-1$, mit $f(x_j) \leq x_m$. Es sei $K=[x_j,x_{j+1}]$. K ist ein Teilungsintervall verschieden von I_0. Wegen $f(x_j) \leq x_m$, $f(x_{j+1}) \geq x_{m+1}$ und Proposition III $f(K)=f([x_j,x_{j+1}]) \supseteq [f(x_j),f(x_{j+1})] \supseteq [x_m,x_{m+1}]=I_0$. □

(vi) Jedes Teilungsintervall K, $K \neq I_0$, mit $f(K) \supseteq I_0$ hat Index $k=n-2$

□ Nehmen wir an, dass $k<n-2$. Dann sei $J_j=f^j(I_0)$ für $j=0,\dots,k-1$, $J_k=K$ und $J_j=I_0$ für $j=k+1,\dots,n-3$. Wegen (ii), (iii) und den Annahmen über K gilt $f(J_j)\supseteq J_{j+1}$ für $j=0,\dots,n-3$ und $f(J_{n-3})\supseteq J_0$. Wegen Proposition VII und Proposition I gibt es ein $\hat{x}\in J_0$ mit $P(\hat{x},f) \mid n-2$. Als Teiler einer ungeraden Zahl kleiner n ist auch $P(\hat{x},f)$ ungerade und kleiner n. Nehmen wir an, es wäre $P(\hat{x},f)=1$. Dann wäre wegen Proposition VII $\hat{x}=f(\hat{x})=\dots=f^k(\hat{x})\in J_0\cap J_k$. $J_0\cap J_k=I_0\cap K$ besteht aber höchstens aus einem der Punkte $x_0,\dots,x_{n-1}$ und diese haben bezüglich f die Periode $n>1$. Es ist also $P(\hat{x},f)$ ungerade, $1<P(\hat{x},f)<n$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen über f. Es ist also $k=n-2$. □

(vii) $f^{j-1}(I_0)\cap\{x_0,\dots,x_{n-1}\}\neq f^j(I_0)\cap\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$ für $j=1,\dots,n-2$.

□ Nehmen wir an, dass $f^{j-1}(I_0)\cap\{x_0,\dots,x_{n-1}\}=f^j(I_0)\cap\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$ für ein j, $1\leq j\leq n-2$. Dann ist $f(f^{j-1}(I_0)\cap\{x_0,\dots,x_{n-1}\})\subseteq f^j(I_0)\cap f(\{x_0,\dots,x_{n-1}\})=f^j(I_0)\cap\{x_0,\dots,x_{n-1}\}=f^{j-1}(I_0)\cap\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$, das heisst $f^{j-1}(I_0)\cap\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$ ist invariant unter f. Wegen (iii) ist $x_m\in f^{j-1}(I_0)\cap\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$ und damit $\{x_0,\dots,x_{n-1}\}=\{x_m,f(x_m),\dots,f^{n-1}(x_m)\}\subseteq f^{j-1}(I_0)\cap\{x_0,\dots,x_{n-1}\}\subseteq f^{j-1}(I_0)$. Da $f^{j-1}(I_0)$ ein Intervall ist, gilt $[x_0,x_{n-1}]\subseteq f^{j-1}(I_0)$. Damit hat aber jedes Teilungsintervall K einen Index $k\leq j-1<n-2$. Dies widerspricht (v) und (vi). □

Wegen (i), (iii) und (vii) enthält $f^j(I_0)$ für $j=0,\dots,n-2$ <u>genau</u> $j+2$ der Punkte $x_0,\dots,x_{n-1}$. $f^j(I_0)$ ist ein Intervall, also zusammenhängend. Die $j+2$ Punkte schliessen deshalb unmittelbar aneinander an, und $f^j(I_0)$ enthält für $j=0,\dots,n-2$ <u>genau</u> $j+1$ der Teilungsintervalle. Wir numerieren nun die Teilungsintervalle I_j für $j=1,\dots,n-2$ derart, dass

(viii) $I_j\subseteq f^j(I_0)$ und $I_j\not\subseteq f^{j-1}(I_0)$.

Wir bemerken noch, dass das Intervall I_j unmittelbar unter- oder oberhalb des Intervalls $I_0\cup\dots\cup I_{j-1}$ anschliesst.

Nun rekonstruieren wir die Anordnung der Intervalle $I_0,\dots,I_{n-2}$ und der Punkte $x_m,f(x_m),\dots,f^{n-1}(x_m)$, bzw. $x_{m+1},f(x_{m+1}),\dots,f^{n-1}(x_{m+1})$.

I_1 schliesst unmittelbar unter- oder oberhalb von I_0 an.

<u>1. Fall</u>: I_1 schliesst unterhalb von I_0 an, das heisst

(ix) $I_1=[x_{m-1},x_m]$.

Nach Konstruktion von I_0 gilt jedenfalls $f(x_m)\geq x_{m+1}$ und $f(x_{m+1})\leq x_m$. Wäre $f(x_m)>x_{m+1}$, dann würde $f(I_0)$ nach Proposition III ausser I_0 und I_1 noch ein weiteres Teilungsintervall überdecken. Es ist also

(x) $f(x_m)=x_{m+1}$.

Aus dem gleichen Grunde kann nicht $f(x_{m+1})<x_{m-1}$ sein. Es kann aber auch nicht $f(x_{m+1})=x_m$ sein, da andernfalls $P(x^*,f)=2<n$ wäre. Es ist also

(xi) $f(x_{m+1})=x_{m-1}$.

Für $n=3$ ist man fertig. Zusammenfassend gilt

(xii) $I_1\leq I_0$ und $f^2(x_m)<x_m<f(x_m)$.

Für $n>3$ schliesst I_2 unmittelbar an $I_0 \cup I_1=[x_{m-1},x_{m+1}]$ an. Wegen (x) und (xi) ist $f^2(x_m)=x_{m-1}$ und $f^2(x_{m+1})=f(x_{m-1})$. Wäre $f(x_{m-1})<x_{m-2}$ oder $f(x_{m-1})>x_{m+2}$, dann würde $f^2(I_0)$ wegen Proposition III ausser I_0, I_1 und I_2 noch ein weiteres Teilungsintervall überdecken. Es kann aber auch nicht $f(x_{m-1})=x_m$ oder $f(x_{m-1})=x_{m+1}$ sein, da andernfalls $P(x^*,f)\leq 3<n$ wäre. Nehmen wir an, dass $f(x_{m-1})=x_{m-2}$. In diesem Falle impliziert Proposition III $f(I_1)=f([x_{m-1},x_m])\supseteq[f(x_{m-1}),f(x_m)]$ $=[x_{m-2},x_{m+1}]\supseteq[x_m,x_{m+1}]=I_0$ im Widerspruch zu (vi), da I_1 nach (viii) Index $1<n-2$ hat. Es ist also

(xiii) $f(x_{m-1})=x_{m+2}$.

Wegen Proposition III gilt nun $f^2(I_0)=f^2([x_m,x_{m+1}])\supseteq[f^2(x_m),f^2(x_{m+1})]=[x_{m-1},x_{m+2}]$, woraus zu entnehmen ist, dass

(xiv) $I_2=[x_{m+1},x_{m+2}]$.

I_3 schliesst unmittelbar an $I_0 \cup I_1 \cup I_2=[x_{m-1},x_{m+2}]$ an. Es ist jedenfalls $f(x_{m+2})\leq x_{m+1}$. Zudem kann nicht $f(x_{m+2})=x_{m+1}$, $f(x_{m+2})=x_m$ oder $f(x_{m+2})=x_{m-1}$ sein, da andernfalls $P(x^*,f)\leq 4<n$ wäre. Wegen (x), (xi) und (xiii) ist $f^3(x_m)=x_{m+2}$ und $f^3(x_{m+1})=f(x_{m+2})$. Wäre $f(x_{m+2})<x_{m-2}$, dann würde $f^3(I_0)$ wegen Proposition III ausser I_0, I_1, I_2 und I_3 noch ein weiteres Teilungsintervall überdecken. Es ist also

(xv) $f(x_{m+2})=x_{m-2}$.

Wegen Proposition III gilt nun $f^3(I_0)=f^3([x_m,x_{m+1}])\supseteq[f^3(x_{m+1}),f^3(x_m)]=[x_{m-2},x_{m+2}]$, woraus zu entnehmen ist, dass

(xvi) $I_3=[x_{m-2},x_{m-1}]$.

Für $n=5$ ist man fertig. Zusammenfassend gilt

(xvii) $I_3\leq I_1\leq I_0\leq I_2$ und $f^4(x_m)<f^2(x_m)<x_m<f(x_m)<f^3(x_m)$

Für $n>5$ ergibt die Iteration der obigen Argumente

(xviii) $I_{n-2}\leq\ldots\leq I_1\leq I_0\leq I_2\leq\ldots\leq I_{n-3}$ und $f^{n-1}(x_m)<\ldots<f^2(x_m)<x_m<f(x_m)<\ldots<f^{n-2}(x_m)$.

Aus (xviii) und Proposition III folgt

(xix) $f(I_j)\supseteq I_{j+1}$ für $j=0,\ldots,n-3$ und $f(I_{n-2})\supseteq I_0$ für jedes gerade j, $0\leq j<n-2$.

<u>2. Fall</u>: I_1 schliesst oberhalb von I_0 an, das heisst

(xx) $I_1=[x_{m+1},x_{m+2}]$.

Mit den gleichen Argumenten wie im 1. Fall zeigt man, dass in diesem 2. Fall

(xxi) $I_{n-3}\leq\ldots\leq I_2\leq I_0\leq I_1\leq\ldots\leq I_{n-2}$ und $f^{n-2}(x_{m+1})<\ldots<f(x_{m+1})<x_{m+1}<f^2(x_{m+1})<\ldots<f^{n-1}(x_{m+1})$.

Aus (xxi) und Proposition III folgt

(xxii) $f(I_j)\supseteq I_{j+1}$ für $j=0,\ldots,n-3$ und $f(I_{n-2})\supseteq I_0$ für jedes gerade j, $0\leq j<n-2$.

Damit ist Proposition XII bewiesen. □

Proposition XIII: Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung mit einem n-periodischen Punkt für ein ungerades n>1. Dann hat f auch einen m-periodischen Punkt für jedes m>n und jedes gerade m<n.

Beweis: Ohne Verlust an Allgemeinheit können wir annehmen, dass n die kleinste ungerade Periode > 1 ist. Die Teilungsintervalle $I_0,\dots,I_{n-2}$ können dann nach Proposition XII derart numeriert werden, dass $f(I_0)\supseteq I_0$, $f(I_j)\supseteq I_{j+1}$ für j=0,...,n-3 und $f(I_{n-2})\supseteq I_j$ für jedes gerade j, $0\le j<n-2$.

Für gerades m<n sei $J_0=I_{n-2}$, $J_1=I_{(n-2)-(m-1)}$, $J_2=I_{(n-2)-(m-2)},\dots$, $J_{m-1}=I_{(n-2)-1}$. Es gilt $f(J_j)\supseteq J_{j+1}$ für j=0,...,m-2 und $f(J_{m-1})\supseteq J_0$. Nach Proposition VII und Proposition I gibt es ein $\hat{x}\in J_0$ mit $P(\hat{x},f)\le m$. Nehmen wir an, dass $P(\hat{x},f)<m$. Nach Proposition VII ist $\hat{x}=f^{P(\hat{x},f)}(\hat{x})\in J_0\cap J_{P(\hat{x},f)}$. $J_0\cap J_{P(\hat{x},f)}$ besteht aber für $1\le P(\hat{x},f)\le m-1$ höchstens aus einem der Punkte $x_0,\dots,x_{n-1}$ und diese haben bezüglich f die Periode n. Es ist also $P(\hat{x},f)=m$.

Für m>n sei $J_j= I_j$, für j=0,...,n-2 und $J_j=I_0$ für j=n-1,...,m-1. Es gilt $f(J_j)\supseteq J_{j+1}$ für j=0,...,m-2 und $f(J_{m-1})\supseteq J_0$. Nach Proposition VII und Proposition I gibt es ein $\hat{x}\in J_0$ mit $P(\hat{x},f) \mid m$. Damit ist insbesondere $P(\hat{x},f)\le m$. Wegen $m>n\ge 3$ ist jedenfalls $P(\hat{x},f)\ne m-1$.
Nehmen wir an, dass $1\le P(\hat{x},f)\le m-2$. Für $1\le P(\hat{x},f)\le n-2$ führt $\hat{x}=f^{P(\hat{x},f)}(\hat{x})\in J_0\cap J_{P(\hat{x},f)}$ zu einem Widerspruch, da $J_0\cap J_{P(\hat{x},f)}$ für $P(\hat{x},f)=1,\dots,n-2$ höchstens aus einem der Punkte $x_0,\dots,x_{n-1}$ besteht und diese bezüglich f die Periode n haben. Für $P(\hat{x},f)=n-1$ und $n+1\le P(\hat{x},f)\le m-2$ folgt $f^{P(\hat{x},f)+1}(\hat{x})=f(\hat{x})\in J_{P(\hat{x},f)+1}\cap J_1=I_0\cap I_1$. Damit ist aber $\hat{x}=f^{P(\hat{x},f)}(\hat{x})=f^{P(\hat{x},f)-1}(f(\hat{x}))\in\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$, was ein Widerspruch ist, da die $x_0,\dots,x_{n-1}$ bezüglich f die Periode n haben. Schliesslich gilt für $n\le m-2$ und $P(\hat{x},f)=n$ $f^{n+1}(\hat{x})=f(\hat{x})\in J_{n+1}\cap J_1=I_0\cap I_1=\{x_m\}$ (vgl. Proposition XII (xviii)). Auch dies führt wegen $\hat{x}=f^n(\hat{x})=f^{n-1}(f(\hat{x}))=f^{n-1}(x_m)\notin I_0=J_0$ (vgl. Proposition XII (xviii)) zu einem Widerspruch. Es ist also $P(\hat{x},f)=m$. □

Proposition XIV: Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung mit einem $2^n\cdot p$-periodischen Punkt für ein ungerades p>1 und ein $n\ge 1$. Dann hat f auch einen $2^n\cdot(p+2)$-periodischen Punkt.

Beweis (Induktion nach n): Es sei n=1 und $x^*\in\mathbf{R}$ mit $P(x^*,f)=2\cdot p$. Nach Proposition II gilt $P(x^*,f^2)=2\cdot p/2=p$. Nach Proposition XIII gibt es ein $\hat{x}\in\mathbf{R}$ mit $P(\hat{x},f^2)=p+2$. Nach Proposition II gilt $P(\hat{x},f)=(p+2)\cdot ggT(P(\hat{x},f),2)$, das heisst $P(\hat{x},f)$ ist gleich p+2 oder $2\cdot(p+2)$. Wenn ersteres zutrifft, dann gibt es wegen Proposition XIII ein $\bar{x}\in\mathbf{R}$ mit $P(\bar{x},f)=2\cdot(p+2)$.
Wir nehmen nun an, dass Proposition XIV für ein $n\ge 1$ zutrifft. Es sei $x^*\in\mathbf{R}$ mit $P(x^*,f)=2^{n+1}\cdot p$. Nach Proposition II ist $P(x^*,f^2)=2^{n+1}\cdot p/2=2^n\cdot p$. Nach Induktionsvoraussetzung (angewandt auf f^2) gibt es ein $\hat{x}\in\mathbf{R}$ mit $P(\hat{x},f^2)=2^n\cdot(p+2)$. Nach Prop. II ist $P(\hat{x},f)=2^n\cdot(p+2)\cdot ggT(P(\hat{x},f),2)$. Wegen $n\ge 1$ ist $P(\hat{x},f)$ durch 2 teilbar und damit $ggT(P(\hat{x},f),2)=2$. Daraus folgt $P(\hat{x},f)=2^{n+1}\cdot(p+2)$. □

Proposition XV: Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung mit einem $2^n\cdot p$-periodischen Punkt für ein ungerades p>1 und ein $n\ge 1$. Dann hat f auch einen $2^{n+1}\cdot 3$-periodischen Punkt.

Beweis (Induktion nach n): Es sei n=1 und $x^*\in\mathbf{R}$ mit $P(x^*,f)=2\cdot p$. Nach Proposition II ist $P(x^*,f^2)=2\cdot p/2=p$. Nach Proposition XIII gibt es ein $\hat{x}\in\mathbf{R}$ mit $P(\hat{x},f^2)=2\cdot 3$. Nach Proposition II ist $P(\hat{x},f)=2\cdot 3\cdot ggT(P(\hat{x},f),2)$. Da $P(\hat{x},f)$ durch 2 teilbar ist, gilt $ggT(P(\hat{x},f),2)=2$ und damit $P(\hat{x},f)=2^2\cdot 3$.
Wir nehmen nun an, dass Proposition XV für ein $n\ge 1$ zutrifft. Es sei $x^*\in\mathbf{R}$ mit $P(x^*,f)=2^{n+1}\cdot p$. Nach Proposition II ist $P(x^*,f^2)=2^{n+1}\cdot p/2=2^n\cdot p$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $\hat{x}\in\mathbf{R}$ mit $P(\hat{x},f^2)=2^{n+1}\cdot 3$. Nach Proposition II ist $P(\hat{x},f)=2^{n+1}\cdot 3\cdot ggT(P(\hat{x},f),2)$. Da $P(\hat{x},f)$ durch 2 teilbar ist, gilt $ggT(P(\hat{x},f),2)=2$ und damit $P(\hat{x},f)=2^{n+2}\cdot 3$. □

Proposition XVI: Es sei f:**R**->**R** eine stetige Abbildung mit einem $2^n \cdot p$-periodischen Punkt für ein ungerades $p>1$ und ein $n\geq 1$. Dann hat f auch einen 2^m-periodischen Punkt für jedes $m\geq 2$.

Beweis (Induktion nach n): Es sei $n=1$, $x^* \in \mathbf{R}$ mit $P(x^*,f)=2\cdot p$ und $m\geq 2$. Nach Proposition II ist $P(x^*,f^2)=2\cdot p/2=p$. Nach Proposition XIII gibt es ein $\hat{x}\in \mathbf{R}$ mit $P(\hat{x},f^2)=2^{m-1}$. Nach Proposition II ist $P(\hat{x},f)=2^{m-1}\cdot ggT(P(\hat{x},f),2)$. Wegen $m\geq 2$ ist $P(\hat{x},f)$ durch 2 teilbar und damit $ggT(P(\hat{x},f),2)=2$. Daraus folgt $P(\hat{x},f)=2^m$.
Wir nehmen nun an, dass Proposition XVI für ein $n\geq 1$ zutrifft. Es sei $x^* \in \mathbf{R}$ mit $P(x^*,f)=2^{n+1}\cdot p$ für ungerades $p>1$ und $m\geq 2$. Nach Proposition II ist $P(x^*,f^2)=2^{n+1}\cdot p/2=2^n\cdot p$. Nach Induktionsvoraussetzung (im Falle $m>2$) oder wegen Proposition X (im Falle $m=2$) gibt es ein $\hat{x}\in \mathbf{R}$ mit $P(\hat{x},f^2)=2^{m-1}$. Nach Proposition II ist $P(\hat{x},f)=2^{m-1}\cdot ggT(P(\hat{x},f),2)$. Wegen $m\geq 2$ ist $P(\hat{x},f)$ durch 2 teilbar und damit $ggT(P(\hat{x},f),2)=2$. Daraus folgt $P(\hat{x},f)=2^m$. □

Nachwort

Sarkovskii publizierte seinen Beweis im Jahre 1964 in russischer Sprache ([i]). Teile des Theorems wurden danach unabhängig von mehreren Autoren bewiesen. Am bekanntesten ist die 1975 publizierte Arbeit von Li und Yorke mit dem Titel "Period three implies chaos" ([ii]). In ihr wird unter anderem gezeigt, dass aus der Existenz eines 3-periodischen Punktes auf die Existenz periodischer Punkte mit jeglicher Periode geschlossen werden kann. Stefan entdeckte 1977 Sarkovskii's Arbeit und übersetzte diese ins Englische ([iii]). Sarkovskii's ursprünglicher Beweis gilt als schwer verständlich. Straffin schlug 1978 eine einfachere, graphentheoretische Beweismethode vor ([iv]). Ho und Morris publizierten 1981 einen vollständigen Beweis des Theorems von Sarkovskii mit der Methode von Straffin ([v]). Unabhängig davon fanden Block, Guckenheimer, Misiurewicz und Young einen in den Grundzügen ähnlichen Beweis ([vi]).

Unser Beweis stützt sich auf die zuletzt zitierte Arbeit ab. Dies trifft insbesondere für die zentrale Proposition XII zu.

Referenzen

[i] Sarkovskii, Ukrain. Math. Z. 16 (1964), 61-71
[ii] Li und Yorke, Am. Mat. Monthly 82 (1975), 985-992
[iii] Stefan, Comm. Math. Phys. 54 (1977), 237-248
[iv] Straffin, Math. Mag. 51 (1978), 99-105
[v] Ho und Morris, Pac. J. Math. 96 (1981), 361-370
[vi] Block, Guckenheimer, Misiurewicz und Young, Springer Lecture Notes in Mathematics 819 (1980), 18-34

Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89-01	H. Walser	Fraktale
89-02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89-03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89-04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii