ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Berichte über Mathematik und Unterricht
Herausgeber: U. Kirchgraber

Bericht No. 93–03
März 1993

Verzweigungsphänomene

von: H.R. Schneebeli, Baden
N. Sigrist, Zürich
F. Spirig, Heerbrugg

Eidgenössische Technische Hochschule
CH–8092 Zürich

Vorwort des Herausgebers

Unterstützt von der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft (SMG) habe ich vom 14. - 18. Oktober 1991 im Bergschulheim Casoja in Valbella einen Workshop zum Thema "Angewandte Mathematik im gymnasialen Unterricht" durchgeführt, an dem dreizehn Kollegen teilnahmen. Wir wollten einige Themen diskutieren, die den Bezug der Mathematik zu ihren Anwendungen auf dem Hintergrund des üblichen gymnasialen Mathematikstoffes aufzeigen. In einem ausserordentlich konzentrierten Einsatz wurden in knapp fünf Tagen folgende vier Themen erarbeitet und zu Papier gebracht:

Annäherung an den goldenen Schnitt

Perspektive und Axonometrie

Verzweigungsphänomene

Der Fallschirmspringer

Natürlich kann in einer knappen Woche nicht bis in alle Details ausgefeiltes Unterrichtsmaterial entstehen. Zwei Arbeitsgruppen haben ihr Projekt im Anschluss an die Valbella-Woche weiter ausgearbeitet und legen einen etwas perfektionierteren Bericht vor. So oder so glaube ich, dass vier sehr anregende Vorschläge entstanden sind, die ich in der Reihe "Berichte über Mathematik und Unterricht" zugänglich machen möchte. Ich hoffe, dass sie auf Interesse stossen und wäre für Kommentare aller Art dankbar.

Den Teilnehmern am Workshop möchte ich für ihren engagierten Einsatz und der SMG, insbesondere ihrem Präsidenten U. Stammbach, für die ideelle und finanzielle Unterstützung danken.

Frühling 1993 U. Kirchgraber

Entwurf 17. 10. 91

Verzweigungsphänomene

Hans Rudolf Schneebeli, Niklaus Sigrist, Franz Spirig *

Vorbemerkungen für den Lehrer

Verzweigungen treten als typische Phänomene in der *nichtlinearen Analysis* auf. Sie sind der Gegenstand, mit dem sich die sogenannte Bifurkationstheorie beschäftigt.
Es soll hier versucht werden, ein neueres und nach wie vor sehr aktives und aktuelles Gebiet der modernen Analysis in geeigneter Bearbeitung für den Mathematikunterricht in der Mittelschule vorzustellen. Grundsätzlich betrachten wir jeweils den einfachsten, nichttrivialen Fall. Als Einstieg machen wir für jedes Beispiel ein Experiment. Dabei wird das Gefühl für das Problem entwickelt,und es werden einige Grundbegriffe erarbeitet.
Wir haben zudem zwei verschiedene Zugänge gewählt: Ein erster baut auf dem Begriff des Gleichgewichtes auf, der zweite geht von Energiebetrachtungen aus. Diese Redundanz lässt sich didaktisch nutzen. Ein Rumpfprogramm könnte aus den Abschnitten 1 bis 3 bestehen, wobei man sich sogar auf ein einziges physikalisches Beispiel beschränken könnte.
Das Thema führt auf grundlegende mathematische Begriffsbildungen und vermittelt eine Perspektive zur Erfahrungswelt der Schüler. Trotz dem elementaren Charakter der verwendeten Werkzeuge erlauben die Beispiele, echte und überzeugende Anwendungen von erheblicher praktischer Bedeutung. Alle notwendigen mathematischen Betrachtungen verlaufen im üblichen Rahmen der Schulmathematik. Wir werden zwangslos auf die Untersuchung von Scharen von Funktionen geführt. Durch verändern des Scharparameters lassen sich die einzelnen Funktionsgraphen zu Flächen aufreihen. Alle diese Flächen sind im folgenden Text bereits dargestellt. Wir haben dazu ein mathematisches Programmpaket (Mathematica) eingesetzt. Dadurch wird eine technische Hauptschwierigkeit beseitigt: Flächen lassen sich in verschiedenen Darstellungen automatisch zeichnen. Die Verwendung eines solchen Hilfsmittels ist damit zwar im Unterricht nicht zwingend. Wo sich jedoch Gelegenheit bietet, sollte auf ein entsprechendes Programmpaket zurückgegriffen werden, da sein Einsatz den Unterricht erleichtert und belebt.

---

* Dieser Textentwurf ist an einem SMG - Workshop vom 13. bis 18. Oktober 1991 in Valbella entstanden. Wir danken der SMG für die finanzielle Unterstützung und Prof. U. Kirchgraber für die Anregung, Verzweigungen elementarmathematisch zu thematisieren.

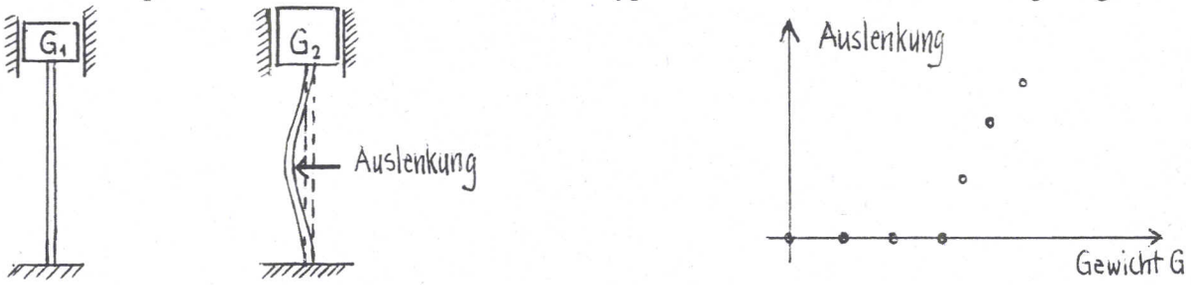
1. Einleitung

Unser Ziel ist die Diskussion von Situationen, in denen ein Vorgang in der Natur oder Technik durch eine gewisse Grösse von aussen gesteuert (beeinflusst) wird. Wir werden sehen, dass in manchen Fällen der Vorgang kaum merklich auf Veränderungen der Steuergrösse reagiert, dann aber zur grossen Verblüffung des Beobachters sich ab einer gewissen Stelle doch dramatische Veränderungen ereignen.

Betrachten wir einige Beispiele.

1.1 Knickung. Eine dünne, senkrecht stehende Stahllamelle (schlanker Stab) wird wie in Abb.1a) durch ein Gewicht am oberen Ende belastet. Für kleine Gewichte geschieht nichts Augenfälliges. Wir wissen jedoch, dass bei sehr grossem Gewicht die Lamelle der Belastung nicht mehr standhalten kann und bricht. So etwas darf z. B. bei einem Stützpfosten natürlich nicht passieren. Für technische Anwendungen sind deshalb Versuche mit Messungen notwendig.

Es zeigt sich dann, dass bei gleichartigen Stäben eine eindeutig definierte Last existiert, bei welcher das Ausknicken plötzlich einsetzt. In Abb. 1b) ist der typische Verlauf einer Messreihe gezeigt.



a) Abb. 1 b)

Aufgabe: Beschaffen Sie sich eine Stahllamelle, etwa 0.5 mm dick, 2 cm breit und 20 bis 30 cm lang. Erstellen Sie eine Einrichtung wie in Abb. 1a) und führen Sie eine Messreihe durch. Vergleichen Sie mit Abb.1b).

1.2 Rotierendes Pendel. Wir betrachten ein starres Pendel wie in Abb. 2 skizziert. Es ist durch ein Scharnier an einer senkrechten Welle befestigt. Die Welle kann mit variabler Drehzahl rotieren. Uns interessiert die Bewegung des Pendelkopfes.

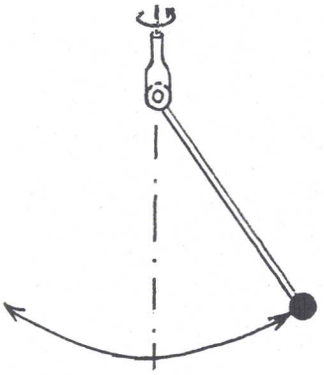


Abb. 2

Aufgabe: Bauen Sie die skizzierte Experimentieraordnung nach und beobachten Sie das Verhalten des Pendels bei zunehmender Drehzahl. Was ist bemerkenswert ? Was ist die Steuergrösse ? Welche Grössen beschreiben den Zustand des Pendels ? Gibt es stabile bzw. instabile Gleichgewichtslagen ?

Man stellt fest:

- Bei kleinen Drehzahlen bleibt das Pendel in gestreckter Stellung.
- Ab einer gewissen Drehzahl wird das Pendel (aus der gestreckten Stellung) ausgelenkt.

1.3 Wanderung. Die Abb. 3a) zeigt eine Phantasielandschaft. Wir versetzen uns in die Lage eines Wanderers, der von links her durch das Tal nach rechts marschiert. Im Punkt P hat er mehrere Möglichkeiten, die Wanderung fortzusetzen. Folgt er geradewegs dem immer schärfer werdenden Rücken, so kommt er vielleicht in Gefahr abzustürzen. Anderseits kann er durch das linke oder rechte Tal absteigen.

Aufgabe: Die Abb.3b) gibt die Höhenliniendarstellung zur Landschaft. Tragen Sie die Höhenlinien zum Punkt P und die drei Fortsetzungsmöglichkeiten ein.

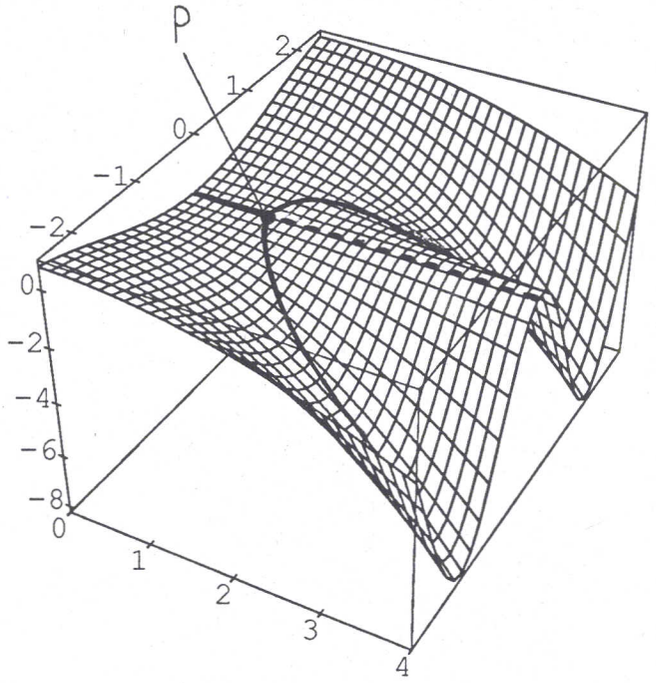


Abb.3a)

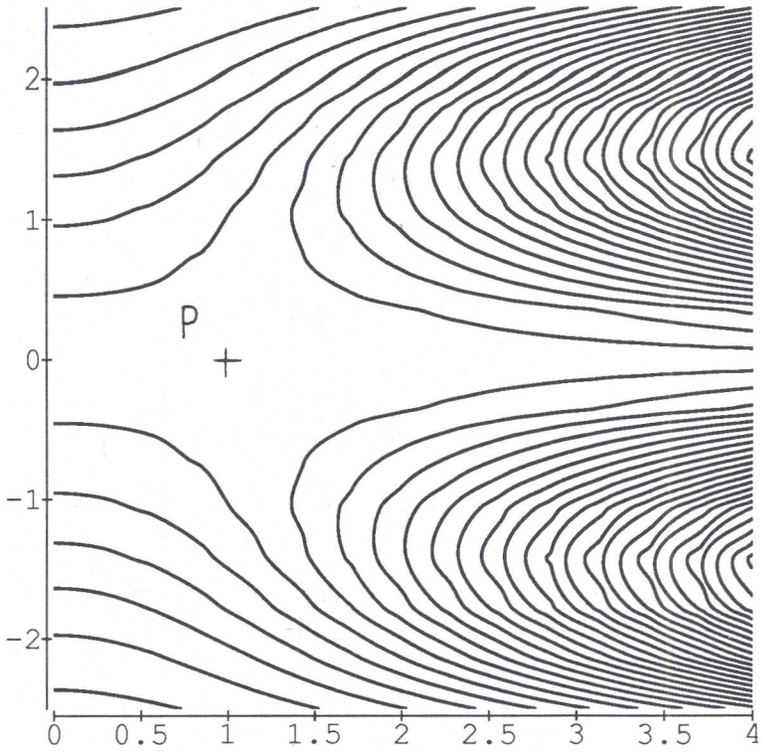


Abb. 3b)

Es ist unser Ziel, das erste und zweite Beispiel mathematisch zu analysieren. Dabei wird sich eine unvermutete Gemeinsamkeit mit dem dritten Beispiel herstellen lassen.

2. Berechnungen.

2.1 Knickung. Wir betrachten als vereinfachtes Modell für die Knickung zwei völlig starre Stäbe je der Länge $\frac{L}{2}$, die durch eine Torsionsfeder miteinander verbunden sind, wie in Abb.4a) gezeigt. Für die Auslenkung aus der Ruhelage (Abb.4a) um einen Winkel β (Abb.4b) muss man ein Drehmoment

$$M = c\,\beta$$

aufwenden. Dabei ist c eine positive Proportionalitätskonstante.

Nun wird der Doppelstab einer Kraft F wie in Abb.4c) ausgesetzt. Gesucht ist die resultierende Auslenkung, d.h. der Winkel α. Die Gleichheit der Drehmomente bezüglich dem Drehpunkt D als Referenzpunkt liefert die

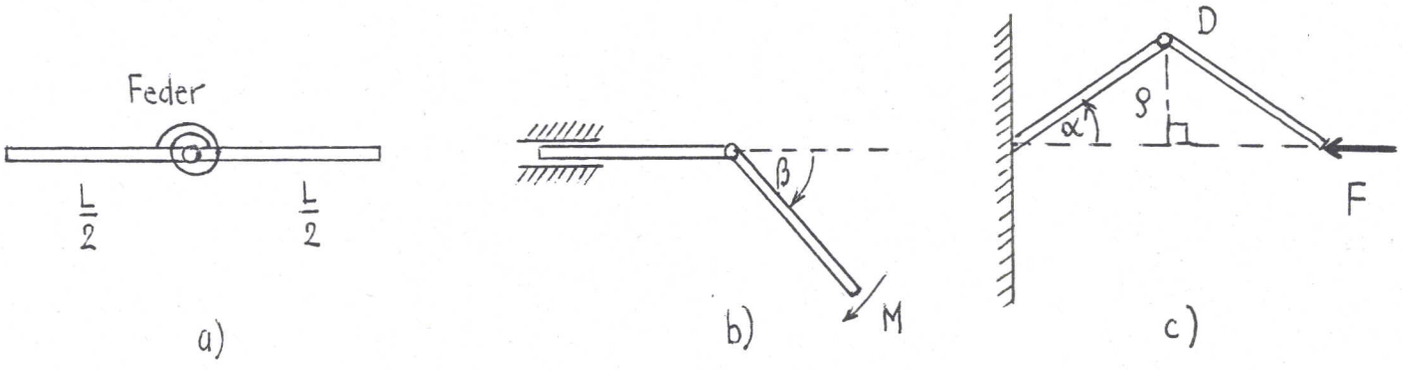


Abb. 4

Gleichgewichtsbedingung

$$c\,\beta = 2\,c\,\alpha = F\,\rho = \frac{1}{2} F\,L \sin\alpha.$$

Mit der Abkürzung

$$\frac{L}{4c}\,F =: \lambda$$

erhalten wir daraus für α die Gleichung

$$\alpha = \lambda \sin\alpha \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{\lambda}\,\alpha = \sin\alpha\,.$$

Als Grundmenge wählen wir $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (α ist im Bogenmass zu verstehen).

Offenbar ist 0 immer eine Lösung.

Aufgabe: Zeichnen Sie in einem (α, y) - Koordinatensystem die Kurve $y = \sin\alpha$ und die Gerade $y = \frac{1}{\lambda}\,\alpha$ und begründen Sie damit die folgenden Aussagen:

Für $\lambda \leq 1$, d.h. Kraft $F \leq \frac{4c}{L}$ existiert keine weitere Lösung. Der Stab verharrt in gestreckter Stellung.

Für $\lambda > 1$, d.h. Kraft $F > \frac{4c}{L}$ gibt es zwei weitere, symmetrisch zu 0 liegende Lösungen $\pm\,\alpha^*$. Der Stab kann (und wird) ausknicken.

Es ist instruktiv, für α^* in Abhängigkeit von λ eine Formel aufzustellen. Wir arbeiten dazu mit der Näherung

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}\,.$$

Nach Einsetzen in die Gleichung für α und Auflösen nach α erhalten wir

$$\alpha^* \approx \sqrt{\frac{6}{\lambda}(\lambda - 1)}\,.$$

Wir stellen nun alle möglichen Gleichgewichtslagen im (α, λ) - Koordinatensystem dar, vgl. Abb. 5

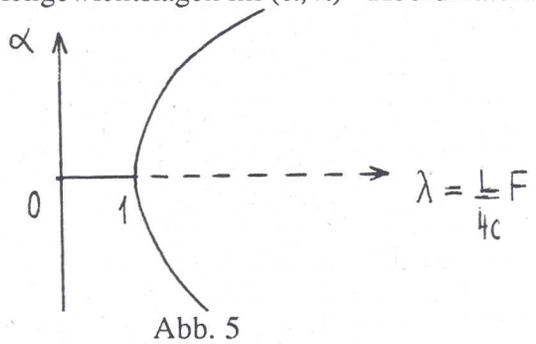


Abb. 5

Wegen der gabelförmigen Gestalt der Figur spricht man von einer sogenannten *Verzweigung* oder *Bifurkation* (Gabelung). Die Abb. 5 heisst Verzweigungsdiagramm.

Überschreitet die Kraft F den kritischen Wert $\frac{4\,c}{\lambda}$, so nimmt die Auslenkung α offenbar plötzlich ziemlich schnell zu.

2.2 Rotierendes Pendel. Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmässig, das in Abschnitt 1.2 beschriebene Pendel durch das folgende Modell zu ersetzen, vgl. Abb. 6. Ein Kreis mit Radius r rotiert um seine vertikale Achse mit Winkelgeschwindigkeit ω. Die Lage der Masse m auf diesem Kreis beschreiben wir mit dem Winkel α. Die tiefste Lage ist $\alpha = 0$, Auslenkungen nach rechts (bzw. links) bei ruhendem Kreis entsprechen positiven (bzw. negativen) Werten von α.

Welche Kräfte wirken auf die Masse m, wenn sie von einem auf m sitzenden Beobachter gemessen werden ? Es sind dies das Gewicht mg, die Zentrifugalkraft $m\,\omega^2\,r\sin\alpha$ und eine zum Kreismittelpunkt wirkende Führungskraft. Es genügt, die resultierende Kraft F in tangentialer Richtung zu bestimmen.

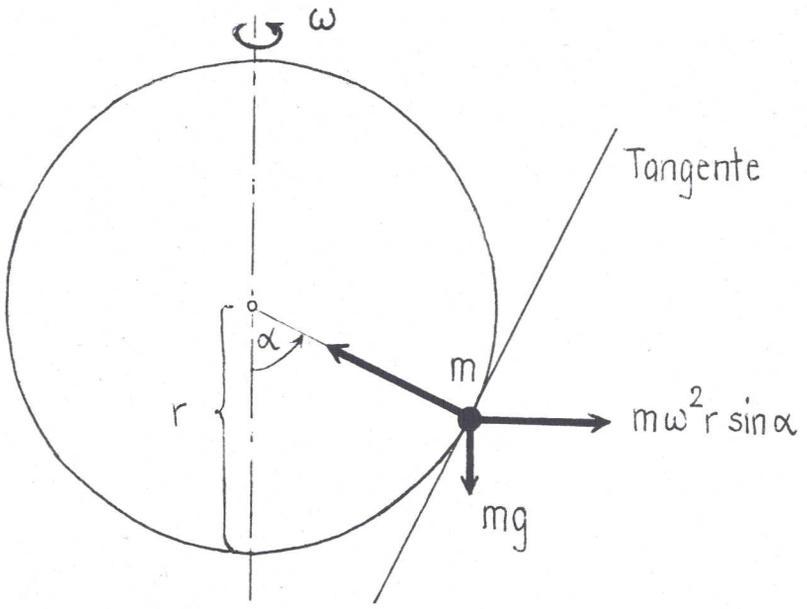


Abb. 6

Aufgabe: Zeigen Sie, dass

$$F = m\,\omega^2\,r\sin\alpha\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

(Die Führungskraft ergibt hier keinen Beitrag).

Wir suchen die Ruhelagen von m. Die Gleichgewichtsbedingung F = 0 liefert eine Gleichung für α ($-\pi < \alpha < \pi$), die gleichwertig ist zu

$$\sin\alpha = 0 \qquad \text{oder} \qquad \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2\,r}\,.$$

Die erste Gleichung hat die Lösung $\alpha = 0$. Die zweite Gleichung hat für $\frac{g}{\omega^2\,r} > 1$, d.h. für

$$\omega < \sqrt{\frac{g}{r}} =: \omega_k$$

keine Lösung und für $\omega > \omega_k$ die beiden Lösungen

$$\alpha = \pm\alpha^* \quad \text{mit} \quad \alpha^* = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2\,r}\right) = \arccos\left(\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2\right).$$

Für $\omega = \omega_k$ fallen die beiden Lösungen der zweiten Gleichung mit $\alpha = 0$ zusammen.

Für kleine Drehzahlen ($\omega < \omega_k$) verharrt die Masse m in der Ruhelage $\alpha = 0$. Überschreitet die Winkelgeschwindigkeit ω den kritischen Wert ω_k, sind neue Ruhelagen $\pm\alpha^* \neq 0$ möglich. Wir nennen ω_k die kritische Winkelgeschwindigkeit.

Wir untersuchen nun den Fall $\omega > \omega_k$. Welche der drei möglichen Ruhelagen 0, $\pm\alpha^*$ wird effektiv eingenommen? (Die beiden Ruhelagen α^* und $-\alpha^*$ sind natürlich gleichwertig, es genügt 0 und $+\alpha^*$ zu betrachten). Wir schreiben die resultierende Kraft F in der Form

$$F = m\,\omega^2\,r\sin\alpha\left[\cos\alpha - \left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2\right].$$

Für $\omega > \omega_k$ ist $\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2 < 1$ und $\left[\cos\alpha - \left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2\right] > 0$ für $0 \le |\alpha| < \alpha^*$.

Der Faktor $\sin\alpha$ ist positiv (bzw. negativ) für $\alpha > 0$ (bzw. $\alpha < 0$). Somit ist $F > 0$ für $0 < \alpha < \alpha^*$ bzw. $F < 0$ für $-\alpha^* < \alpha < 0$. Daraus folgt: Ist die Masse m nahe bei der Ruhelage $\alpha = 0$, so wird sie durch die Kraft F von dieser weggetrieben, d.h. die Ruhelage $\alpha = 0$ ist *instabil* für $\omega > \omega_k$.
Jetzt betrachten wir die Ruhelage $\alpha = \alpha^*$. Man beachte, dass $\left[\cos\alpha - \left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2\right] < 0$ für $\alpha > \alpha^*$.
Somit ist $F < 0$ für $\alpha < \alpha^*$. Daraus folgt: Ist die Masse m nahe bei der Ruhelage $\alpha = \alpha^*$, so wird sie durch die Kraft F zu dieser zurückgetrieben, d. h. die Ruhelage $\alpha = \alpha^*$ ist *stabil* für $\omega > \omega_k$.
Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Ruhelage $\alpha = 0$ stabil ist für $\omega < \omega_k$.

Das folgende Verzweigungsdiagramm Abb. 7 fasst die Resultate zusammen. Es werden die Ruhelagen α in Abhängigkeit von ω aufgetragen. Ausgezogene Linien stehen für stabile, gestrichelte Linien für instabile Ruhelagen.

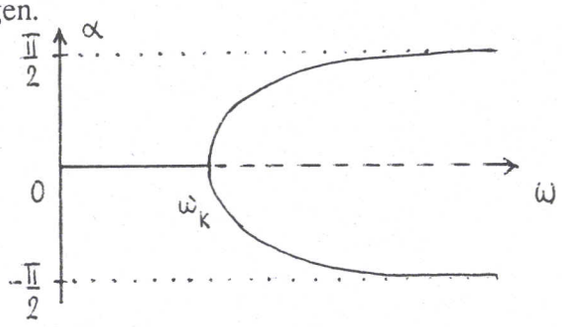


Abb. 7

Es fällt auf, dass dieses Verzweigungsdiagramm qualitativ gleich aussieht wie jenes in Abb. 5.

3. Das Gleiche aus der Vogelperspektive

Überraschenderweise ist es möglich, die beiden ersten Beispiele (Knickung, rotierendes Pendel) mit dem dritten Beispiel (Landschaft), zu verknüpfen. Wir erklären dies am vorher besprochenen Beispiel.

3.1 Nochmals das rotierende Pendel. Wir gehen aus von der Kraftfunktion

$$F(\alpha) = m\,\omega^2 r \sin\alpha \left[\cos\alpha - \left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2\right] = m\,r\,[\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha - \omega_k^2 \sin\alpha]$$

und suchen eine Stammfunktion $V(\alpha)$ von $-F(\alpha)$, d.h. eine Funktion V mit $V' = -F$. Man findet

$$V(\alpha) = -m\,r\,[\tfrac{1}{2}\omega^2 \sin^2\alpha + \omega_k^2 \cos\alpha].$$

In der Abb.8 sind die Graphen von $V(\alpha)$ für verschiedene Werte des Parameters ω aufgetragen (für $g = 1$, $m = 1$, $r = 1$).
Für festes ω kann man die Ruhelagen und ihre Stabilität dem Graphen von $V(\alpha)$ wie folgt entnehmen. Die Ruhelagen sind offensichtlich die sogenannten stationären Stellen von $V(\alpha)$, d.h. jene Stellen, wo $V'(\alpha)$ verschwindet.
Betrachten wir als nächstes etwa das Minimum von $V(\alpha)$ an der Stelle $\alpha = \alpha^*$. Für α nahe bei α^* gilt:
Aus $\alpha < \alpha^*$ folgt $V'(\alpha) < 0$, d.h. $F(\alpha) > 0$, aus $\alpha > \alpha^*$ folgt $V'(\alpha) > 0$, d.h. $F(\alpha) < 0$.
Also ist die Kraft in der Nähe der Minimalstelle $\alpha = \alpha^*$ rücktreibend und diese Ruhelage ist stabil.

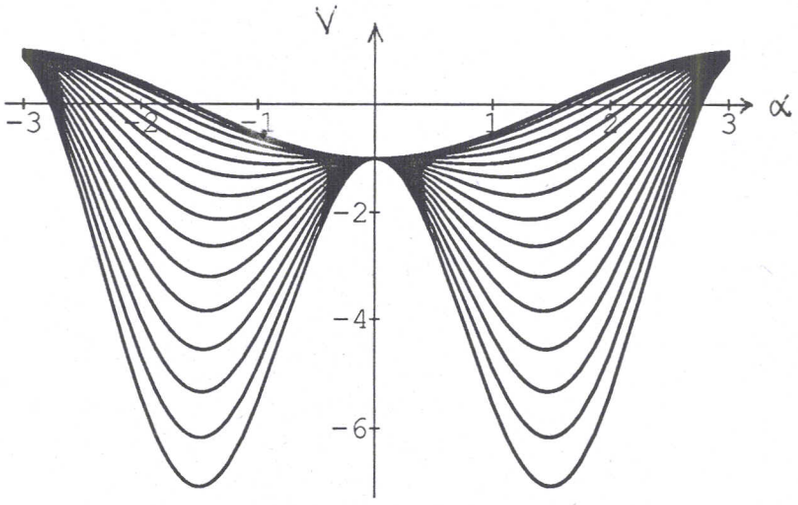


Abb. 8

Allgemein gilt der

SATZ. *Voraussetzung:* Die Lage eines Massenpunktes m wird durch die Variable x beschrieben. Zu der auf m wirkenden Kraft F gibt es eine Funktion V, sodass $F(x) = - V'(x)$ für alle x gilt.
Behauptung: Die Ruhelagen sind stationäre Stellen von V(x), insbesondere ist jede Minimalstelle eine *stabile* und jede Maximalstelle eine *instabile* Ruhelage.

Aufgabe: Begründen Sie den zweiten Teil der Satzes betreffend Maxima.

Der Satz erlaubt folgende ansprechende Veranschaulichung. Der Massenpunkt bewegt sich in der Nähe einer Ruhelage qualitativ gleich wie eine fiktive Kugel auf der Kurve $y = V(x)$ unter dem Einfluss der in negativer y - Richtung wirkenden Schwerkraft.
Kehren wir wieder zum vorher diskutierten Beispiel zurück.
Wir wollen die vorangehende Veranschaulichung für die Beschreibung der Verzweigung ausnützen. Dazu betrachten wir den Parameter ω neben α als zweite Variable und fassen V als Funktion von α *und* ω auf:

$$V = V(\alpha, \omega) = - m\, r\, [\tfrac{1}{2}\, \omega^2 \sin^2\alpha + \omega_k^{\,2} \cos \alpha].$$

Die grafische Darstellung erfolgt im (α, ω, V) - Koordinatensystem. Zu jedem Paar (α, ω) zeichnen wir den Punkt $(\alpha, \omega, V(\alpha, \omega))$. Die Gesamtheit dieser Punkte ist eine Fläche ("Landschaft"). Die Abb. 3a) zeigt gerade diese Fläche für das vorliegende Beispiel.
Die Schnitte der Ebenen ω = konst. mit der Fläche sind die Kurven in Abb. 8.

Aufgabe: a) Markieren Sie in Abb. 8 für jede Kurve die Minima und verbinden Sie benachbarte.
b) Zeichnen Sie den entsprechenden Weg in Abb. 9a) und Abb. 9b) ein und vergleichen Sie mit Abb. 3a) und 3b).

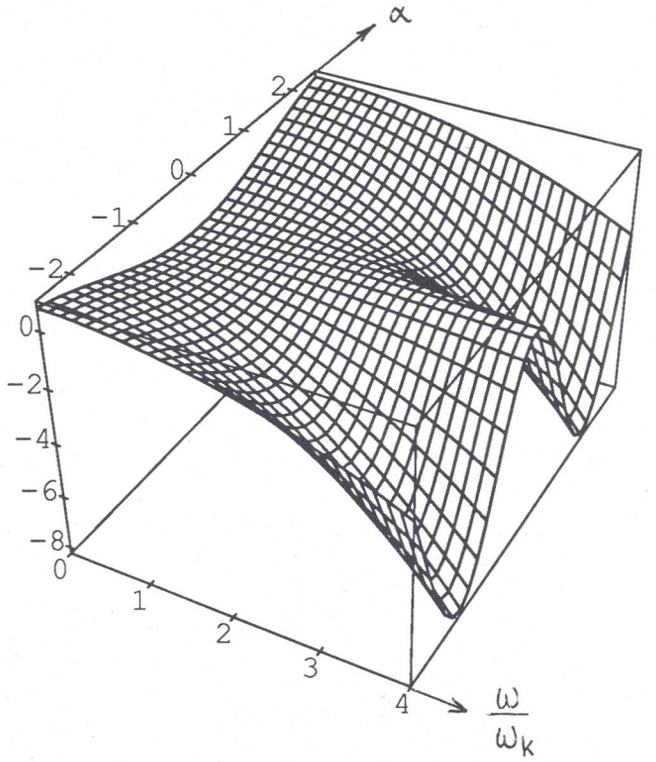


Abb. 9 a)

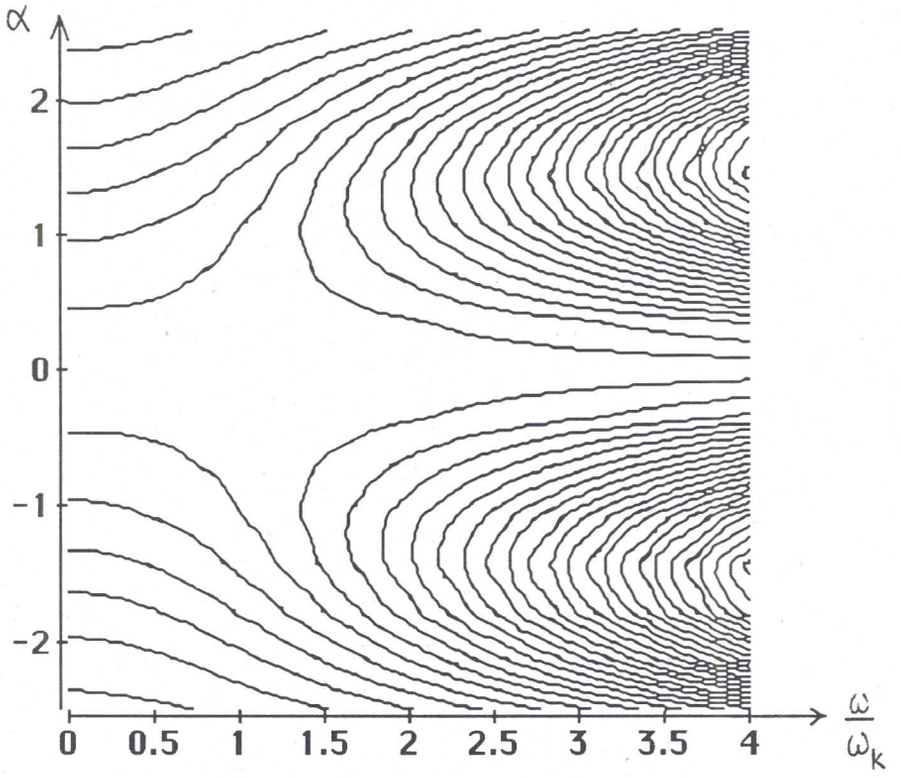


Abb. 9b)

Damit ist das am Ende von Abschnitt 1 angekündigte Versprechen zumindest für die Beispiele 2 und 3 eingelöst. Es ist nun klar, dass für jedes System mit einem Parameter, bei welchem die Kraft als Ableitung einer Funktion -V darstellbar ist, sich das gleiche Vorgehen zur Untersuchung anwenden lässt. Im folgenden Abschnitt stellen wir den Zusammenhang zwischen den Beispielen 1 und 3 her.

3.2 Nochmals Knickung. Wir betrachten nochmals die Knickung von Abschnitt 1.1 und 2.1.

Aufgabe: a) Zeigen Sie: Das Drehmoment M bezüglich dem Bezugspunkt D in Abb. 4c) ist

$$M(\alpha) = 2\,c\,(\lambda \sin \alpha - \alpha).$$

M ist positiv im Uhrzeigersinn.

b) Diskutieren Sie die Stabilität der Gleichgewichtslagen analog wie in Abschnitt 2.2.

c) Bestimmen Sie jene Stammfunktionen V von -M,für welche $V(0) = \lambda$ ist. Zeichnen Sie die Kurven $y = V(\alpha)$ für $-\pi < \alpha < \pi$, je für $\lambda = 0, 1, 2, 3$ und 4.

d) Die Abb. 10a) und b) zeigen das Schrägbild und Höhenliniendarstellung von V für c = 0.5.

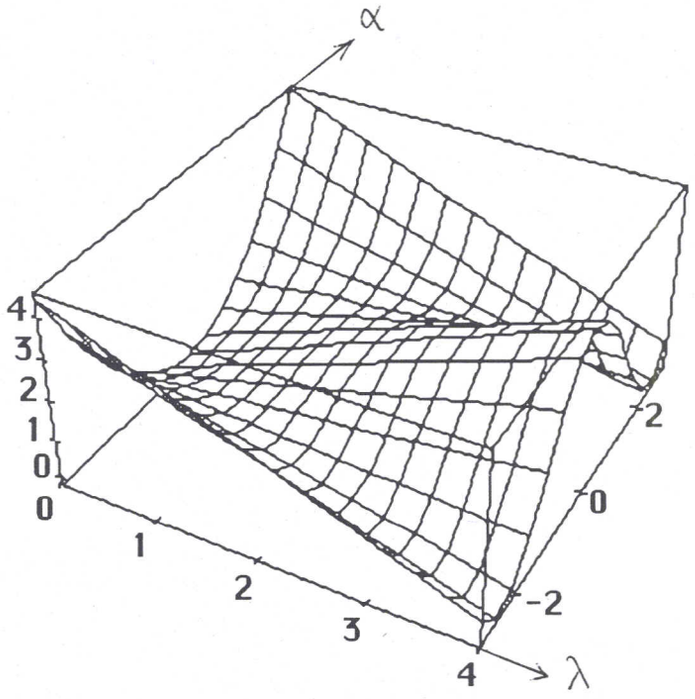


Abb. 10 a)

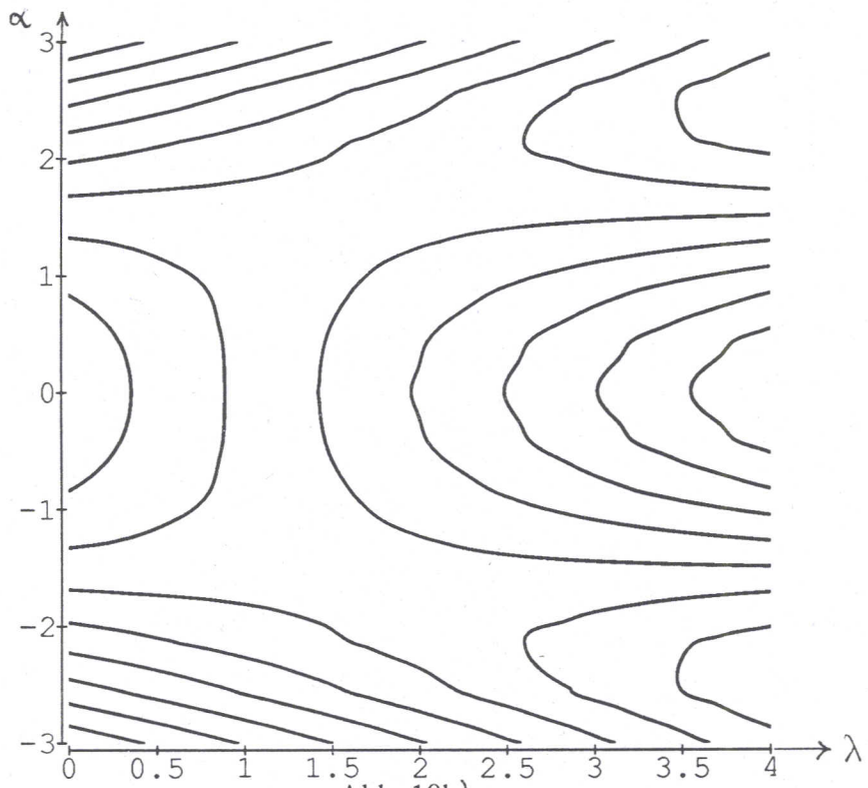


Abb. 10b)

Überprüfen Sie diese Abb. mit den Resultaten von c) und übertragen Sie das Verzweigungsdiagramm Abb. 5 in die Abb. 10.

4.Bemerkungen und weitere Aufgaben

4.1 Kraft und potentielle Energie. In vielen Beispielen ist die oben eingeführte Funktion V die potentielle Energie. Eine Stärke der mathematischen Methode (V als Stammfunktion zu definieren), liegt gerade darin, dass V nicht notwendigerweise eine Energie sein muss.

Im folgenden stellen wir den Zusammenhang zwischen Kraft und potentieller Energie dar. Anschliessend wird das Beispiel des rotierenden Pendels nochmals aufgenommen und die potentielle Energie *direkt*, d.h. ohne Benützung der Kraft berechnet.

Eine Punktmasse bewegt sich auf der x - Achse unter dem Einfluss einer Kraft F, d.h. an jeder Stelle x wirkt die Kraft F(x) auf die Masse m (Abb. 11).

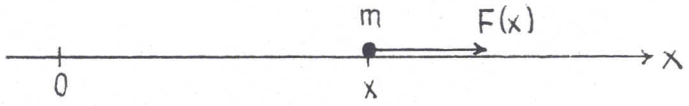


Abb. 11

Die Kraft F leistet auf dem Wegstück von x nach x + Δx die Arbeit $\Delta W \approx F(x)\,\Delta x$, genauer ist

$$F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta W}{\Delta x}\right) = W'(x).$$

Mit der Definition $W(x) =: V(0) - V(x) = \int_0^x F(z)\,dz$ wird die potentielle Energie V(x) eingeführt und es folgt, dass für alle x wieder $V'(x) = -F(x)$ gilt.

Aufgabe: Die Masse m stürzt von der Höhe h auf die Höhe 0. Dabei wirkt als Kraft das Gewicht −mg. Wie gross ist V(0) - V(h) ? (Abb. 12).

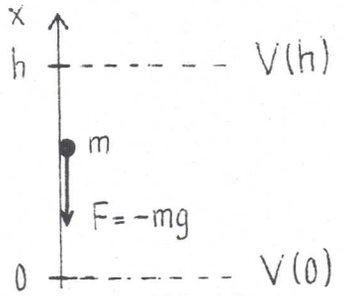


Abb. 12

4.2 Das rotierende Pendel

Aufgabe: Das rotierende Pendel aus Abschnitt 1.2 ist genau entsprechend dem Muster von Abschnitt 3.1 zu behandeln. Dabei soll jedoch die Auslenkung x gemäss Abb. 13a) anstelle des Winkels α benutzt werden, um die Lage des Pendels zu beschreiben.

a) Stellen Sie für die bei der Auslenkung x wirkende Kraft F(x) die Formel auf.

b) Für welche Funktionen V erfüllt die Ableitung V' die Beziehung V' = - F ?

c) Welches sind die Ruhelagen ? Für welche Werte von ω sind sie stabil bzw. instabil ?

d) Zeichnen Sie das Verzweigungsdiagramm.

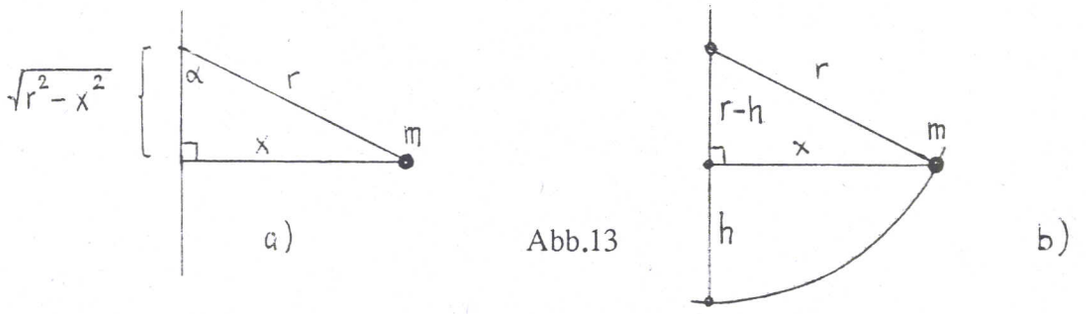


Abb.13

Bemerkung

Ein Vergleich der Lösung dieser Aufgabe mit den Herleitungen in Abschnitt 3.1. zeigt, dass (natürlich) dieselbe kritische Kreisfrequenz ω_k und qualitativ dasselbe Verzweigungsdiagramm erhalten wird, obwohl die Verwendung der beiden Variablen α und x zu ganz verschiedenen Ausdrücken für die Funktion V führt. Diese Beobachtung bringt uns auf den Gedanken, die gleiche Aufgabe nochmals zu lösen, wobei die Wahl der Variable, die die Lage des Pendels beschreibt, so getroffen werden soll, dass die Energie des rotierenden Pendels einfach zu bestimmen ist. Im rotierenden System betrachtet setzt sich die (potentielle) Energie des Pendels zusammen aus einem Betrag, der vom Anheben der Masse m um die Höhe h gegenüber der tiefsten Lage stammt. Der zweite Beitrag rührt von der Rotationsenergie der Masse m her, die sich mit Geschwindigkeit $v = \omega x$ um die Achse bewegt (siehe Abb. 13b)):

$$V = mgh - 1/2\, m\, (\omega x)^2 = mgh - 1/2\, m\, \omega^2(2rh - h^2), \text{ dabei ist } h \geq 0$$

Aufgabe: a) Skizzieren Sie die Graphen von V für m= 1, r=1, g=1 im Bereich $0 \leq h < 2$ für die Werte des Parameters $\omega = 0, 1, 2$.

b) Markieren Sie in Ihren Sizzen je die auftretenden Extrema.

c) Berechnen Sie die Lage der auftretenden Minimalstellen in Abhängigkeit von ω.

d) Begründen oder widerlegen Sie: Der kritische Wert ω_k entspricht genau dem Fall, wo ein Randpunkt eine stationäre Stelle von V ist.

e) Man bestimme die stabilen und instabilen Ruhelagen, abhängig von ω, nach folgendem Kriterium:

1. Jede Extremalstelle von V ist eine Ruhelage.
2. Jede Minimalstelle von V ist eine stabile, jede Maximalstelle eine instabile Ruhelage.

f) Zeichnen Sie das Verzweigungsdiagramm. Was fällt auf beim Vergleich mit den bisher gefundenen Verzweigungsdiagrammen?

Bemerkung

Mit dem folgenden Trick lässt sich die Einschränkung $h \geq 0$ vermeiden. Wir wählen eine neue Variable z und setzen $h = z^2$ in den obigen Berechnungen ein. Damit erhalten wir für die potentielle Energie die Funktion U mit

$$U(z) = V(h(z)) = V(z^2) = mg\, z^2 - 1/2\, m\, \omega^2(2r\, z^2 - z^4)$$

Aufgabe: a)Skizzieren Sie die Graphen von U für m= 1, r=1, g=1 im Bereich $-\sqrt{2} < z < \sqrt{2}$ für die Werte des Parameters $\omega = 0, 1, 2$.

b) Markieren Sie in Ihren Skizzen je die auftretenden Extrema.

c) Berechnen Sie die Lage der auftretenden Extremalstellen in Abhängigkeit von ω.

d) Man bestimme die stabilen und instabilen Ruhelagen

e) Zeichnen Sie das Verzweigungsdiagramm. Was fällt auf beim Vergleich mit dem Verzweigungsdiagramme der letzten Aufgabe?

f) Bestimmen Sie das Verzweigungsdiagramm anhand der beiden folgenden Darstellungen der Funktion U.

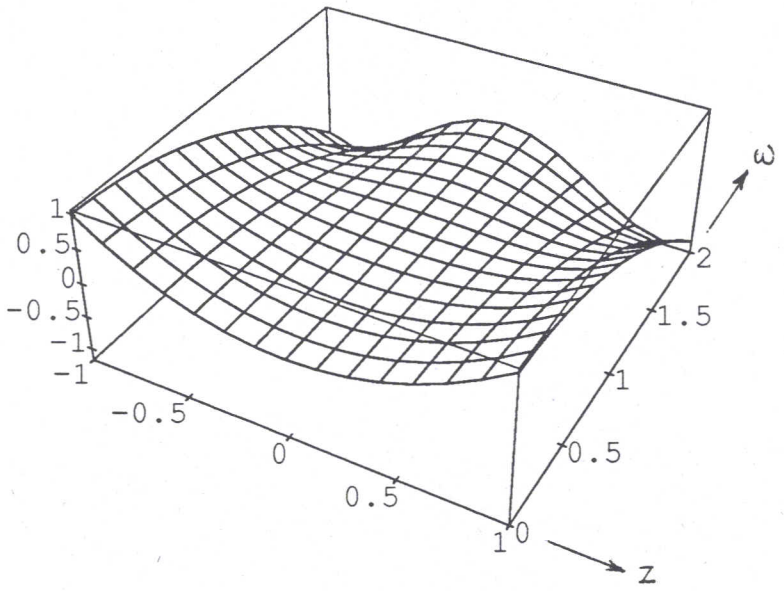


Abb. 14a)

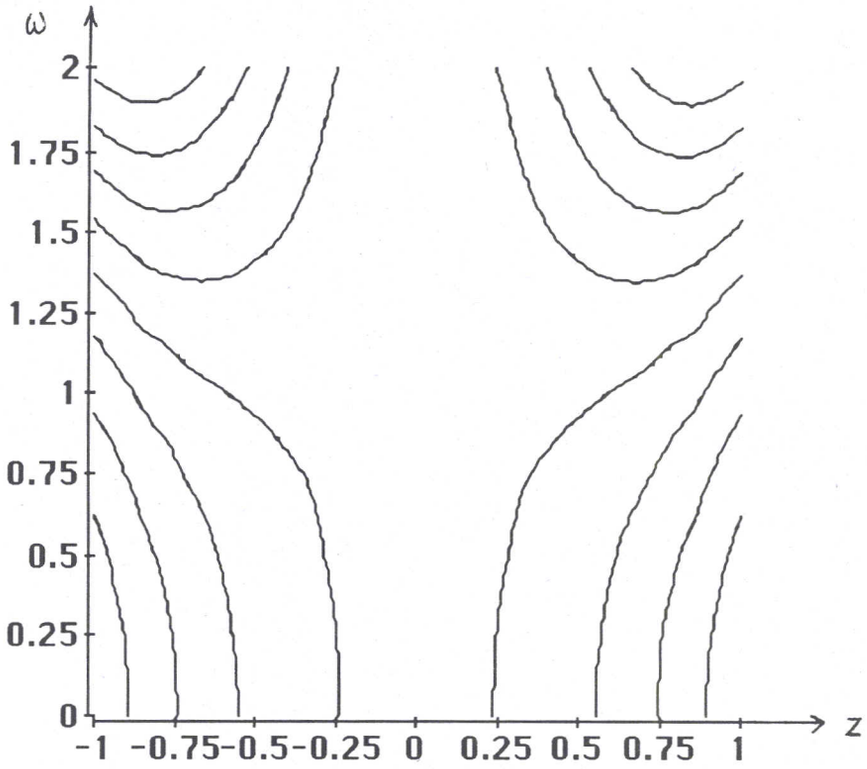


Abb. 14b)

4.3 Das Verzweigen von Lösungen

Die bisher betrachteten Beispiele für Verzweigungsphänomene sind im Rahmen von physikalischen Modellen aufgetreten. Es macht den Anschein, dass Gleichgewichte oder Kräfte oder Potentialfunktionen eng mit dem Phänomen verbunden seien. Die folgenden Beispiele sollen diesen unzutreffenden Eindruck korrigieren. Wir untersuchen die Lösungsmengen von Polynomgleichungen in einer Variablen x und mit einem Parameter p. Die *Zahl der reellen Lösungen* dieser Gleichungen hängt vom Wert von p ab. Es treten Verzweigungen auf, wenn sich diese Anzahl der Lösungen verändert.

Aufgabe: Zeichnen Sie in einem (p, x)-Koordinatensystem die Lösungsmengen für folgende Gleichungen in Abhängigkeit vom Parameter p auf.

a) $x^2 = p$ b) $x^3 = px$ c) $(x^2-p)(x^2-p+1) = 0$ d) $p = x(x^2-1)$ e) $x = px(1-x)$, $0 \le p \le 2$ für die Grundmenge $0 \le x \le 1$.

Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89-01	H. Walser	Fraktale
89-02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89-03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89-04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90-01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90-02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
90-03	U. Kirchgraber	Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II
91-01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91-02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91-03	M. Federer	Preistheorie
91-04	M. Gauglhofer	Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen
92-01	U. Kirchgraber	Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen
93–01	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Annäherung an den Goldenen Schnitt
93–01(I)	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Approccio alla Sezione Aurea
93–02	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Perspektive und Axonometrie
93–02(I)	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Prospettiva e Assonometria
93–03	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Verzweigungsphänomene
93–03(I)	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Fenomeni di Biforcazione
93–04	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Der Fallschirmspringer
93–04(I)	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Il Paracadutista
93–05	H.R. Schneebeli	Alles fliesst – Mit dem Graphikrechner zu den Quellen der Analysis
93–06	H. Biner	Kongruenzabbildungen und Symmetrien im Euklidischen Raum
93–07	U. Kirchgraber	Hundert Jahre Störungstheorie – Differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev
94–01	U. Maurer	Kryptologie: Mathematik zwischen Anwendung und Ästhetik
94–02	H. Klemenz	Computergestützte Raumgeometrie