ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Berichte über Mathematik und Unterricht
Herausgeber: U. Kirchgraber

Bericht No. 90–01
Februar 1990

Von Mathematik und Mathematikunterricht

von Urs Kirchgraber, Zürich

Eidgenössische Technische Hochschule
CH – 8092 Zürich

Herr Rektor,
Herr Vorsteher,
Liebe Kollegen,
Meine Damen und Herren!

Am 5. Oktober 1957 verknurrte mich meine Mutter dazu im Bett zu bleiben, weil ich einen schändlichen Pfnüsel hatte! Aber fiebrig war ich an jenem Morgen nicht nur deshalb. Was der Tages-Anzeiger da meldete regte mich auf: Sputnik I umkreiste die Erde!

Nr. 234 84 Seiten Preis inkl. »Zeitbilder« 60 Rp. 65. Jahrgang Samstag, den 5. Oktober 1957

Tages-Anzeiger

Erscheint an allen Werktagen mittags

für Stadt und Kanton Zürich

(Zürcher Anzeiger — Stadt Anzeiger — General Anzeiger)

mit wöchentlichem illustriertem Unterhaltungsblatt »Zeitbilder«

Unparteiisches Organ für jedermann und Hauptinsertionsblatt für die deutschsprachige Schweiz

Auflage über 140 000 Exemplare

In 95 Minuten um die Erde

Abschuß des ersten Erdsatelliten durch die Sowjetunion

Moskau, 4. Okt. (AFP) In der Sowjetunion wurde am Freitag der erste Erdsatellit abgeschossen. Die Agentur Tass meldet, der künstliche Satellit umkreise gegenwärtig — wie vorgesehen — die Erde auf einer Flugbahn in Elliptenform in einer Höhe von 900 Kilometern. Der Satellit habe die Form einer Kugel von 58 Zentimetern Durchmesser, wiege 83,6 Kilogramm und sei mit zwei Radiosendern ausgerüstet. Der künstliche Satellit wurde laut Tass mit einer Rakete abgeschossen. Seine Umlaufzeit um die Erde betrage eine Stunde und 35 Minuten. Die Rakete habe dem Satelliten die erforderliche Fluggeschwindigkeit von rund 8000 Metern pro Sekunde verliehen. Der Satellit könne in den Strahlen der auf- und untergehenden Sonne mit Hilfe eines Fernrohres beobachtet werden. Die Sowjetunion beabsichtigt, im Laufe des Internationalen Geophysikalischen Jahres noch weitere künstliche Satelliten abzuschießen, die größer und schwerer sein sollen als der am 4. Oktober abgeschossene Satellit.

Die offizielle Ankündigung

Moskau, 5. Okt. ag. (AFP) Freitagnacht veröffentlichte die Agentur Tass folgendes Communiqué über den Abschuß des ersten künstlichen Satelliten: »Seit mehreren Jahren wurden in der Sowjetunion Forschungsarbeiten und Versuche zur Herstellung künstlicher Erdsatelliten durchgeführt. Wie in der Presse bereits bekanntgegeben, waren die ersten Abschüsse von Satelliten in der Sowjetunion im Rahmen des Programms für das Internationale Geophysikalische Jahr vorgesehen. Als Ergebnis intensiver Arbeiten der Forschungsinstitute und Konstruktionsbüros wurde ein künstlicher Erdsatellit, der erste der Welt, hergestellt. Am 4. Oktober 1957 wurde der erfolgreiche Abschuß des ersten künstlichen Satelliten vorgenommen. Aus den ersten Untersuchungen geht hervor, daß die Leitrakete dem Satelliten die erforderliche Fluggeschwindigkeit von ausgelen Schätze der Welt. Das in dieser Höhe durchgeführte wissenschaftliche Experiment ist von ungeheurer Tragweite für das Studium des Kosmischen Raumes und der Erde als Planet unseres Sonnensystems. Die künstlichen Satelliten werden interplanetarischen Reisen den Weg ebnen, und allem Anschein nach werden unsere Zeitgenossen Zeugen der Verwirklichung der kühnsten Träume der Menschheit sein dank der Arbeit der neuen sozialistischen Gesellschaft.«

Die Flugbahn wird allmählich enger

(AF) Die von dem sowjetischen Satelliten erreichte Geschwindigkeit von annähernd 28 000 km pro Stunde ist notwendig, um die Anziehungskraft der Erde soweit zu überwinden, daß der Satellit eine Planetenbahn um die Erde beschreiben kann. Aber auch in der großen Höhe, die der Satellit erreicht, besteht eine wenn

Meinung bedeute, daß die Russen im Rahmen des Internationalen Geophysikalischen Jahres einen friedlichen Wettstreit mit den Vereinigten Staaten zu ihren Gunsten entschieden haben. Die Meldung vom Abschuß des ersten künstlichen Erdsatelliten ist in Washington unmittelbar gewertet in amerikanischen wissenschaftlichen Kreisen, die gegenwärtig die letzten Vorbereitungen für den Abschuß einer Rakete von sechs künstlichen Satelliten treffen, ist die Feststellung weniger groß. Im Lande der in Washington zu Ende gegangenen internationalen Konferenz, die sich im Rahmen des Geophysikalischen Jahres mit dem Problem beschäftigender Raketen befaßte, waren die amerikanischen Wissenschaftler von ihren sowjetischen Kollegen über die russischen Fortschritte unterrichtet worden.

Schukow auf dem Weg nach Belgrad

London, 4. Okt. (AFP) Der sowjetische Verteidigungsminister Marschall Schukow hat sich auf Freitag auf dem Luftwege in die Krim begeben. Von dort aus wird er nächste Woche nach Belgrad weiterreisen. Westliche Beobachter sind der Auffassung, daß Schukow vor seinem Belgrader Besuch mit Parteichef Chrustschew und anderen Sowjetführern, die auf der Krim ihren Urlaub verbringen, Besprechungen haben wird.

Heute in unserem Blatt:

Das aktuelle Bild
Um alten Bestsingenden
Für die Frau
Euer Tagi
Sam-Fer gibt ein Beispiel
Recht / Richter
Wirtschaft im Blickfeld
Unterhaltung und Wissen
Film
Theater
Aktuell
Radio und Fernsehen

Hinter verschlossenen Türen

Beginn des Prozesses gegen Milovan Djilas

Belgrad, Mitrovica, 4. Okt. (AFP) An die hundert Personen, die Hälfte davon Journalisten, trafen am Freitag den kleinen Saal des Departementsgerichts von Belgrad in Mitrovica, als der Vorsitzende, Nikolic, kurz nach 8 Uhr die Verhandlungen im Prozeß gegen Milovan Djilas eröffnete. Der Gerichtshof besteht außer dem Präsidenten aus einem Richter und drei Geschworenen. Verteidiger von Djilas ist Veljko Kostatschewitsch, Generalsekretär der Serbischen Anwaltskammer.

Fig. 1: Tages-Anzeiger vom 5.Okt. 1957

Da flog eine Metallkugel um die Welt, piepste Signale zur Erde und fiel nicht herunter. Von da an las ich begierig die Zeitungen und was mir sonst so in die Hände fiel. Es war eine Zeit munterer, ja hemmungsloser Spekulationen:

Raumstationen, Mondflüge, interplanetare, ja interstellare Missionen wurden keck ins Auge gefasst! Es schien, als ob mit einem Mal all die alten Träume wahr werden würden . "Die Anfangsbewegung ist für den Mondfahrer die schlimmste", hatte z. B. vor langer Zeit einmal einer prophezeit, "denn er wird so emporgeschleudert, als wenn er, wie durch die Kraft des Pulvers angetrieben, auf einer Kanonenkugel dahinflöge". Das war aber nicht Jules Verne! Der dies geschrieben hat ist kein geringerer als Johannes Kepler, in seinem Buch "Traum vom Mond" im Jahre 1609.

Mich beschäftigte heftig die Frage, warum ein Satellit, ohne permanent angetrieben zu werden, um die Erde kreisen kann, obwohl ein Stein, den man wirft, immer wieder auf den Boden zurückfällt. Nach langem stiess ich auf folgende Erklärung. Man betrachtet die Bewegung des Satelliten während einer kurzen Zeitspanne; der Satellit bewegt sich dann, Fig.2,auf seiner Kreisbahn vom Punkt P_0 zum Punkt P_1; nun stellt man sich vor, dass sich diese Bewegung aus einer gleichförmig tangentialen Bewegung von P_0 nach Q und einer Phase freien radialen Falles von Q nach P_1 zusammensetzt. Damit wird das Phänomen des frei kreisenden Satelliten verständlich: Durch die tangentiale Bewegung wird gerade soviel Höhe gewonnen, wie durch die Phase des radialen Falles wieder verloren geht!

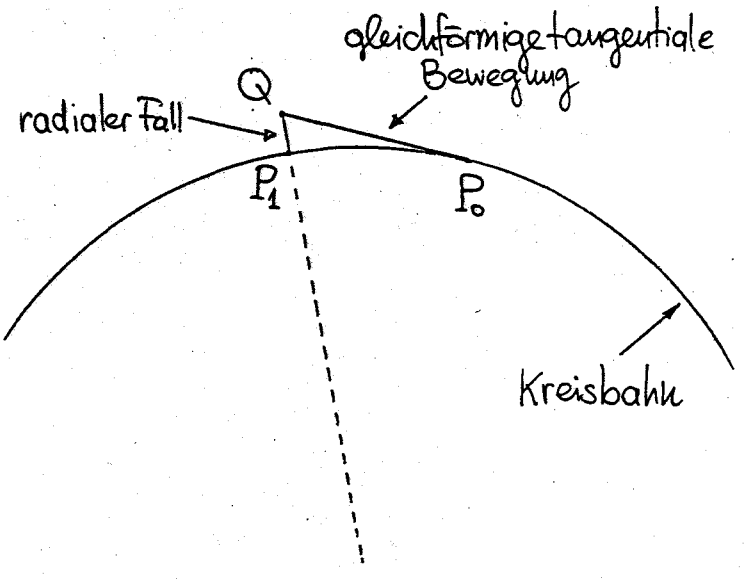

Fig. 2: Bewegung eines Satelliten

Diese Überlegung machte mir damals viel Freude und die Aufgabe Bewegungsabläufe zu beschreiben, hat mich nicht mehr losgelassen.

Die Geschichte der *dynamischen Systeme*, d.h. die mathematische Theorie von den Bewegungen, begann, als sich der 23-jährige Isaac Newton 1665 vor der Beulenpest in sein Heimatdorf Woolsthorpe flüchtete und er anhand der Bewegungen der Himmelskörper die Grundgesetze der Mechanik entdeckte und er - um sie zu beschreiben - die Differential- und Integralrechnung erfand.

Ein dynamisches System, meine Damen und Herren, ist durch sein *Bewegungsgesetz* charakterisiert. Bei den Bewegungen der Himmelskörper und bei vielen anderen Beispielen handelt es sich um *differentielle* Bewegungsgesetze, d.h. die momentane Tendenz des Systems wird durch seinen momentanen Zustand bestimmt. Man nennt solche dynamische Systeme *Differentialgleichungen*. Im Unterschied zu sog. *stochastischen Prozessen* ist das zukünftige Verhalten eines dynamischen Systems durch seinen gegenwärtigen Zustand vollständig bestimmt. Diese Tatsache veranlasste Laplace bekanntlich, Fig. 3, zur Proklamation seines berühmten Weltgeistes der die Geschichte der Welt vor- und rückwärts ermitteln kann.

> Nous devons envisager l'état présent de l'Univers comme l'éffet de son état antérieur et comme la cause de ce qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaitrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule le mouvement des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome, rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yieux.

Fig. 3: Laplace: Essai philosophique sur les probabilités, 1814

Differentialgleichungen hängen eng mit dem Begriff des *diskreten dynamischen Systems* zusammen. Man betrachtet eine Menge von möglichen Zuständen und als Bewegungsgesetz eine *Vorschrift, die jedem Zustand einen Nachfolgezustand zuordnet*. Eine *Bahn* ist dann, Fig. 4, eine Folge von Zuständen x_0, x_1, x_2, x_3, usw., so dass jeder Zustand Nachfolger seines Vorgängers ist. Der Anfangszustand x_0 bestimmt die Bahn.
Lassen Sie mich diesen Begriff mit dem sog. *Game of Life* illustrieren. Wir betrachten die Ebene, versehen mit dem Einheitsnetz und besetzen endlich viele Zellen. Ein so besetztes Gitter ist ein Zustand. Fig. 5 zeigt einige Beispiele. Das Bewegungsgesetz, das den Übergang von einem Zustand zum nächsten bestimmt, ist durch folgende Regeln festgelegt:

1. Eine besetzte Zelle bleibt besetzt, genau wenn sie 2 oder 3 besetzte Nachbarzellen hat.
2. Eine leere Zelle wird besetzt, genau wenn sie 3 besetzte Nachbarzellen hat.

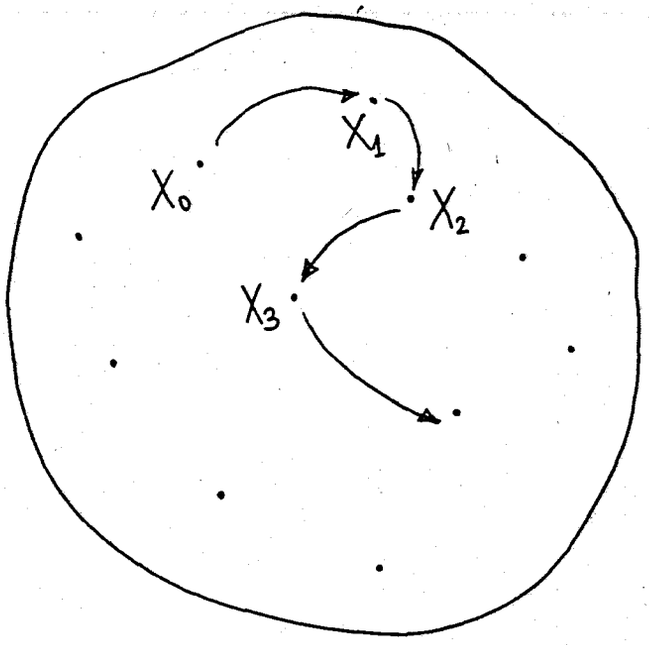

Fig. 4: Bahn eines diskreten dynamischen Systems

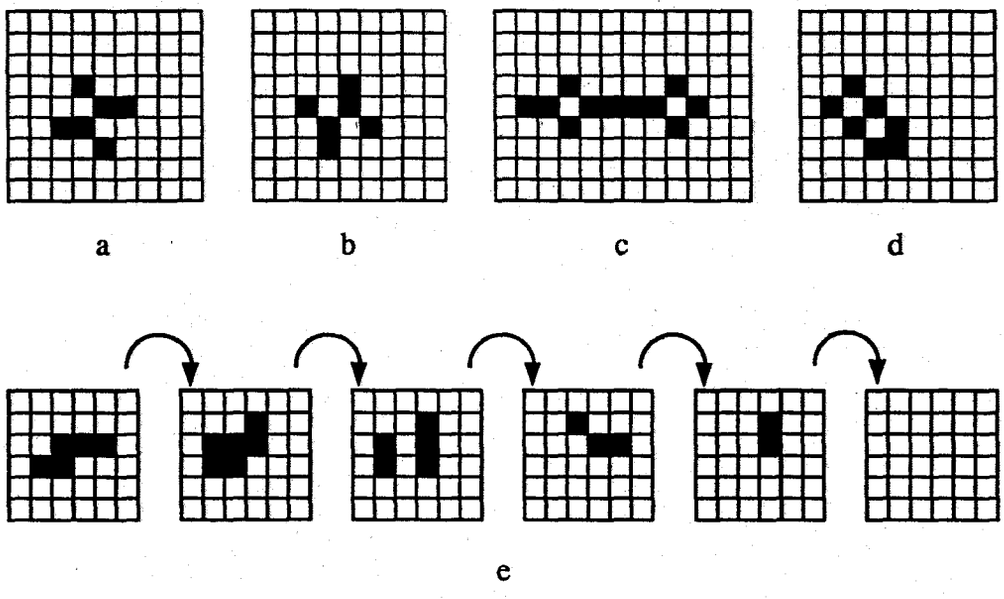

Fig. 5: Game of Life

Es ist leicht zu verifizieren, dass der Zustand b der Nachfolgezustand von a ist; umgekehrt ist a auch der Nachfolgezustand von b. Die Zustände a und b erzeugen demnach *periodische Bahnen der Periode 2*. Es gibt auch periodische Bahnen mit grossen Perioden. Beispielsweise erzeugt der Zustand c eine 15-periodische Bahn. d dagegen zeigt einen *Fixpunkt*, d. h. die Konfiguration verändert sich nicht. e schliesslich zeigt eine sog. aussterbende Konfiguration. Man sieht an diesem Beispiel ein für dynamische Systeme typisches Phänomen. Einerseits ist es leicht eine Bahn Schritt für Schritt zu bestimmen; andererseits ist es *schwierig* ihr Verhalten, insbesondere *langfristig vorherzusagen*, wobei gerade das Langzeitverhalten besonders interessiert.

Beim Game of Life besteht der Zustandsraum aus abzählbar unendlich vielen Zuständen. Typischerweise wird ein Zustand durch eine Zahl, oder durch mehrere Zahlen, oder sogar durch eine Funktion beschrieben. Eine Bahn ist dann im kontinuierlichen Fall eine Kurve, z.B. in der Ebene, bzw. eine Folge von Punkten bei diskreten dynamischen Systemen.

Im Game of Life gibt es periodische Bahnen, wie wir gesehen haben, d.h. *ein gewisser Ablauf wiederholt sich unaufhörlich.* Periodische Bahnen lassen sich in vielen dynamischen Systemen nachweisen.Die Methoden reichen von einfachen Anwendungen des Satzes über implizite Funktionen bis zur Benutzung tiefliegender funktionalanalytischer oder topologischer Ideen.

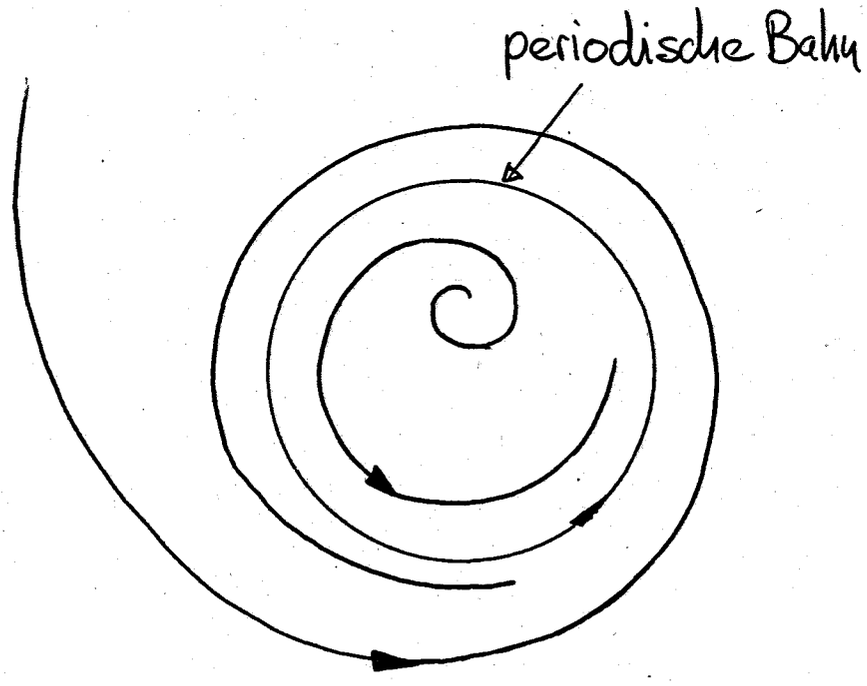

Fig. 6: Attraktive periodische Bahn

Von besonderem Interesse sind periodische Bahnen, die *attraktiv* sind, Fig. 6, d.h. solche, die benachbarte Bahnen anziehen, denn eine attraktive periodische Bahn beschreibt das Langzeitverhalten von sehr vielen Bahnen.

Was gibt es jenseits periodischen Verhaltens?

Um dieser Frage nachzugehen ist es zweckmässig, das Augenmerk nicht nur auf eine einzelne Bahn zu richten, sondern ganze Kollektionen von Bahnen zu betrachten. *Eine Menge von Bahnen, heisst invariante Menge.* Insbesondere interessieren invariante Mengen *mit ausgezeichneten geometrischen und dynamischen Eigenschaften.* Beispielsweise soll die Menge eine Fläche sein, oder allgemeiner eine Mannigfaltigkeit, etwa ein Torus. Um zu verstehen, warum gerade *invariante Tori* eine Rolle spielen betrachten wir einen *harmonischen Oszillator*

$$x''+\omega^2 x=0,$$

also die Schwingungen einer Feder mit linearer Rückstellkraft. Jede Lösung lässt sich bekanntlich durch sinus oder cosinus ausdrücken, ist also periodisch und beschreibt, in einer x-x'-Ebene dargestellt, Fig. 7a, eine *geschlossene Kurve*, nämlich eine *Ellipse.*

Nehmen wir einen *zweiten* harmonischen Oszillator

$$y''+\mu^2 y=0,$$

dazu, d.h. wir betrachten nun zwei schwingende Federn, dann ist jede Lösung des Oszillatorenpaares, d.h *jede Bahn* dieses dynamischen Systems, *eine Kurve auf einem 2-dimensionalen Torus im 4-dimensionalen x-x'-y-y'-Raum*, Fig 7b. Der ganze Raum zerfällt in invariante Tori, Fig 7c.

Führen wir nun Nichtlinearitäten und eine Kopplung zwischen den beiden Oszillatoren ein, d.h. wir betrachten das Gleichungspaar

$$x''+\omega^2 x=f,$$

f, g Funktionen von x,x',y,y'

$$y''+\mu^2 y=g,$$

wobei f und g *Störungen*, also klein sind. Das Verhalten dieses Systems hängt wesentlich von der Wahl der Störungen ab. Wird das System durch die Störung, physikalisch gesprochen, *selbsterregt und dissipativ* gemacht, so *verschwinden* die meisten der ursprünglich vorhandenen invarianten Tori; *das gestörte System hat nur noch einzelne invariante Tori, von denen einige attraktiv sein können*, d.h. sie ziehen benachbarte Bahnen an, Fig. 8. Die Frage, *welche* Lösungen des ungestörten Oszillatorenpaares Kandidaten, sozusagen Keime für invariante Tori des gestörten Systems sind, ist eine *Grundaufgabe der Theorie der nichtlinearen Schwingungen.* Sie können mit einer Methode entdeckt werden, die mit dem bekannten *Galerkinverfahren*

verwandt ist.

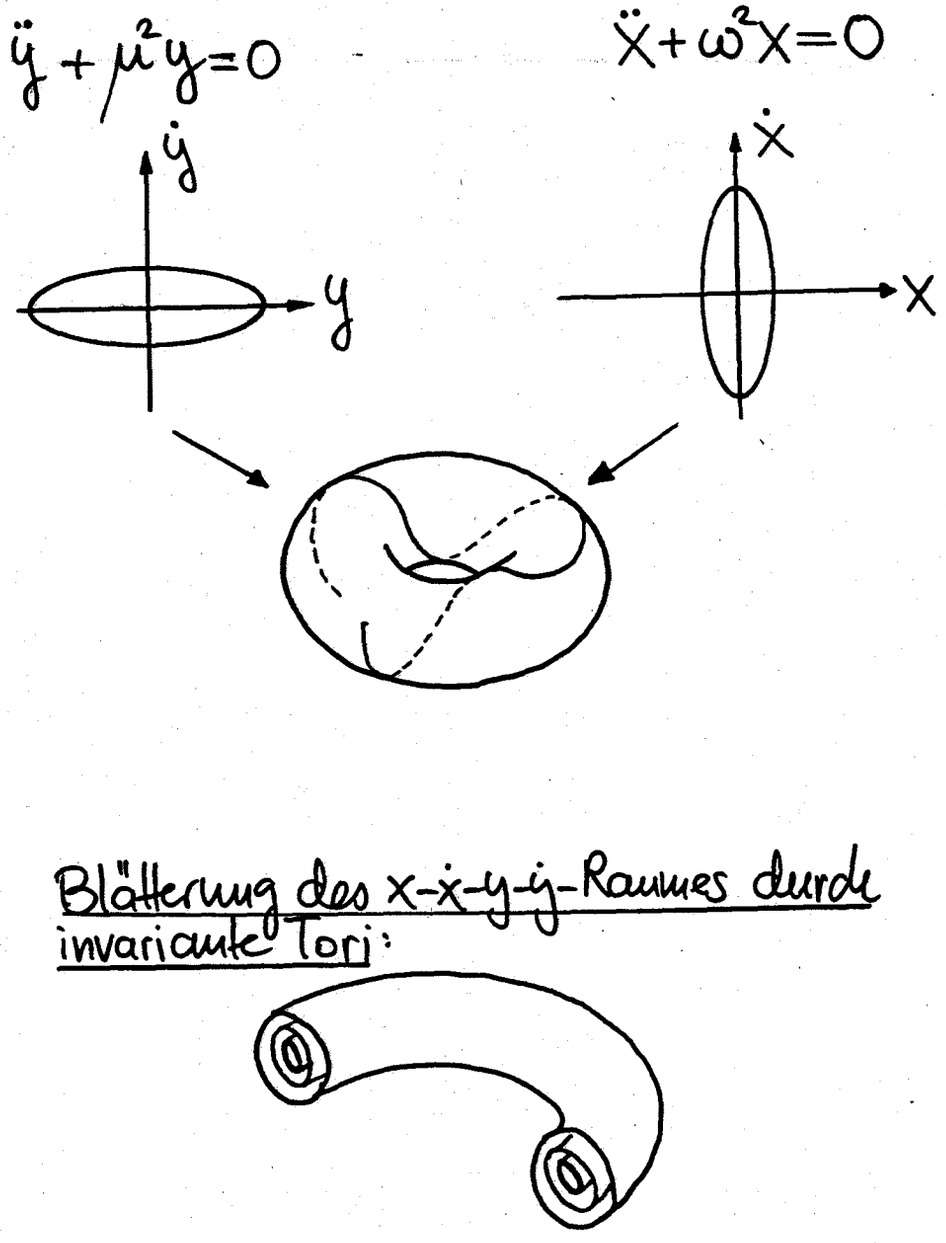

Fig. 7 : Zwei harmonische Oszillatoren

Die eigentliche Existenz eines attraktiven invarianten Torus folgt dann aber aus der *Theorie der invarianten Mannigfaltigkeiten*. Diese ist von Poincaré, sowie von dessem Landsmann, dem bedeutenden Mathematiker Jaques Hadamard um die Jahrhundertwende begründet und seither durch eine lange Reihe von Arbeiten zu einem ausgefeilten Instrument entwickelt worden. Dabei geht es

um folgendes. *Es liege eine invariante Mannigfaltigkeit M eines dynamischen*

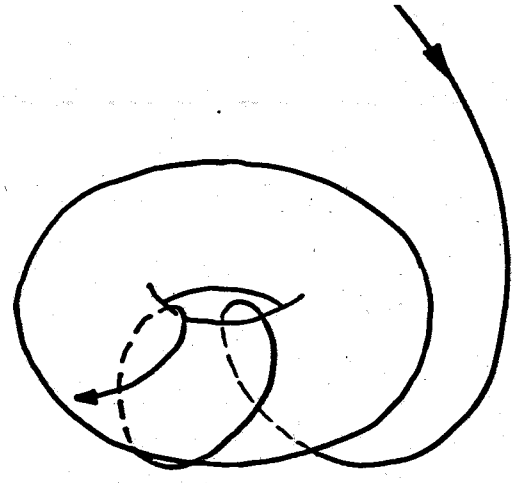

Fig. 8: Attraktiver invarianter Torus

Fig. 9: Jaques Hadamard (1865-1963)

Systems mit Bewegungsgesetz f vor, also z.B. eine Fläche im R^n, die durch die Abbildung f in sich abgebildet wird. Nun werde das Bewegungsgesetz ein wenig abgeändert. Besitzt das veränderte diskrete dynamische System eine invariante Mannigfaltigkeit M', welche nahe bei M liegt? Die Antwort hängt von den geometrischen Eigenschaften der Abbildung f ab; sie ist *ja*, Fig 10, falls f in zu M normaler Richtung kontrahierend und in zu M tangentialer Richtung expandierend oder kontrahierend ist, wobei im zweiten Fall die normale Kontraktion die tangentiale dominieren muss.

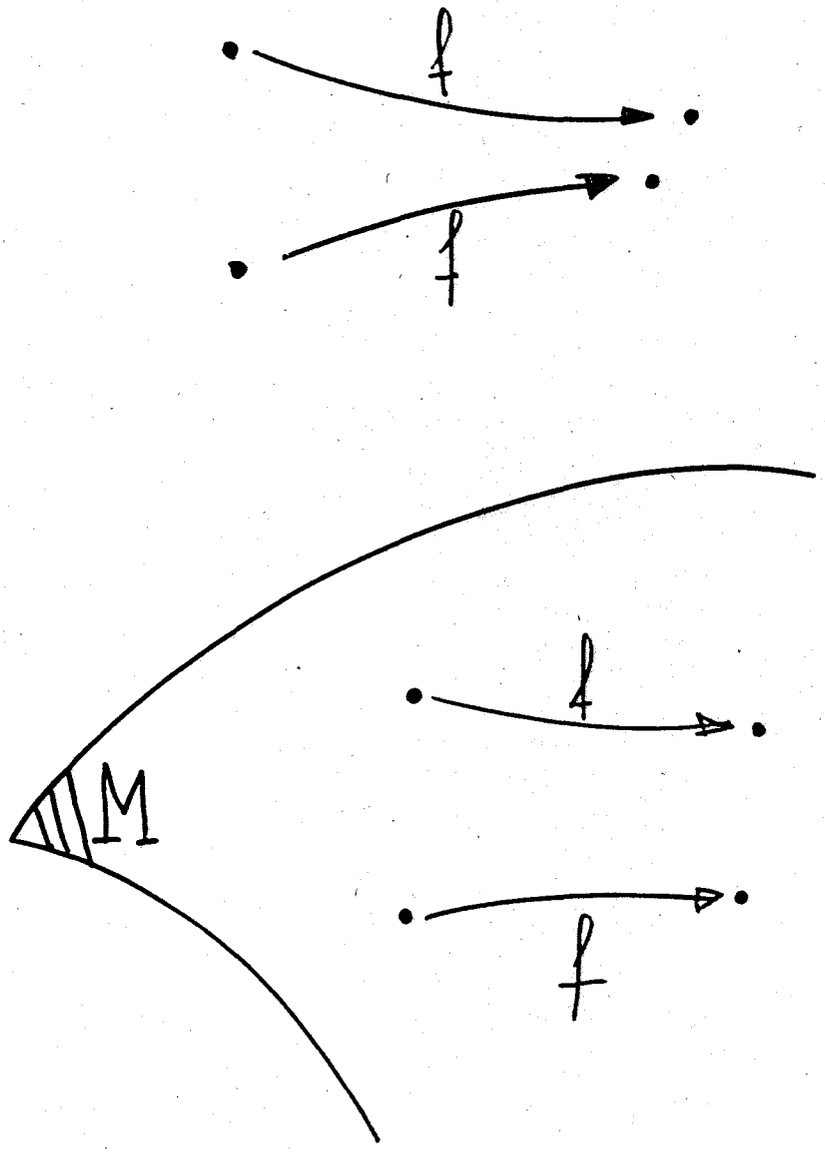

Fig 10: Existenz invarianter Mannigfaltigkeiten

Unter dieser Bedingung strebt dann auch jede Bahn, die in der Nähe von M' startet gegen eine Bahn, die in M' verläuft. Man kann weiter nach der Menge der Anfangspunkte derjenigen Bahnen fragen, die asymptotisch zu einer Bahn in M' sind. Die Menge aller derartigen Mengen bildet eine *invariante*, zu M' *transversale Blätterung*; benutzt man sie zur Definition eines lokalen Koordinatensystems, erhält man eine teilweise Entkopplung der tangentialen von der normalen Komponente des Bewegungsgesetzes. Die Entkopplung kann *total* gemacht werden, indem man eine weitere invariante Blätterung einführt, die M' als Blatt enthält.

Es ist interessant das vorher beschriebene Problem der gekoppelten Oszillatoren auch *vom Standpunkt der numerischen Mathematik* aus zu betrachten. Numerische Methoden zur approximativen Integration von Differentialgleichungen *sind* diskrete dynamische Systeme. Für das Problem der zwei gestörten harmonischen Oszillatoren kann man zeigen, dass beispielsweise das viel benutzte klassische Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 einen attraktiven invarianten Torus des Differentialgleichungssystems *glatt übersieht*, wenn nicht die Schrittweite klein ist im Vergleich zu Grösse der Störung. Das führt bei schwacher Störung zu unannehmbar kleinen Schrittweiten. Benutzt man hingegen andere, sogenannte *symmetrische Integratoren*, so ist das qualitative Verhalten des numerischen Verfahrens richtig, selbst wenn die Störung klein ist im Vergleich zur Schrittweite.
Die Verwendung der Theorie der invarianten Mannigfaltigkeiten hat übrigens auch bei anderen Fragen der numerischen Analysis überraschende Resultate ergeben. So lassen sich Mehrschrittverfahren durch eine invariante Mannigfaltigkeit auf Einschrittverfahren, Verfahren mit variabler Schrittweite auf Verfahren mit konstanter Schrittweite zurückführen, u.ä.

Doch verlassen wir die Numerik wieder. Nehmen wir an, dass ein System von gestörten harmonischen Oszillatoren einen attraktiven invarianten Torus T besitzt. *Wie ist die Dynamik auf* T? Falls der Torus 2-dimensional ist, kann man auf klassische Resultate von Poincaré und Denjoy zurückgreifen: Entweder ist das Verhalten periodisch oder aber *quasiperiodisch*.
Damit Sie sich eine Vorstellung von quasiperiodischer Bewegung machen können, bitte ich Sie auf ein Karussell, aber nicht auf eine altmodische Reitschule, mit Kutschen und Holzpferdchen und feuerroten Feuerwehrautos - nein, auf eines dieser neuzeitlichen Folterinstrumente, wo man um mindestens zwei verschiedene Achsen geschleudert wird. Quasiperiodisch ist die Bewegung, falls die beiden Frequenzen *inkomensurabel* sind.

Quasiperiodische Bewegungen beschreiben fast periodisches, d. h. sich fast wiederholendes Verhalten. Dennoch ist es schon ein grosser Unterschied zwischen periodischen und quasiperiodischen Bahnen. Eine quasiperiodische Bahn liegt *dicht* auf dem Torus, d. h. sie kommt jedem Punkt auf dem Torus beliebig nahe.

Die Dynamik auf 3- oder noch höherdimensionalen Tori kann noch komplexer sein. Sogenanntes *chaotisches Verhalten* ist möglich. Um anzudeuten, was man darunter versteht, beschreibe ich eine charakteristische Eigenschaft, die sog. *Sensitivität*. Betrachten wir, Fig. 11, eine beliebige Bahn mit Anfangspunkt x. Dann starten in jeder noch so kleinen Nachbarschaft von x Bahnen, die sich, bis ein gewisser Minimalabstand erreicht ist, exponentiell schnell von der ersten Bahn entfernen. Man sagt, das System sei empfindlich - eben sensitiv - gegenüber Änderung der Anfangsbedingung.
Diese Eigenschaft macht ein dynamisches System trotz seines grundsätzlich deterministischen Charakters *de facto unprognostizierbar*, weil der Anfangszustand eines Systems immer nur mit begrenzter Genauigkeit bestimmt werden kann. Diese Bemerkung ist seit einiger Zeit sogar in den Medien Thema und wird als neue Entdeckung gefeiert. Tatsächlich hat Poincaré schon am Anfang dieses zu Ende gehenden Jahrhunderts klipp und klar auf diese Möglichkeit hingewiesen.

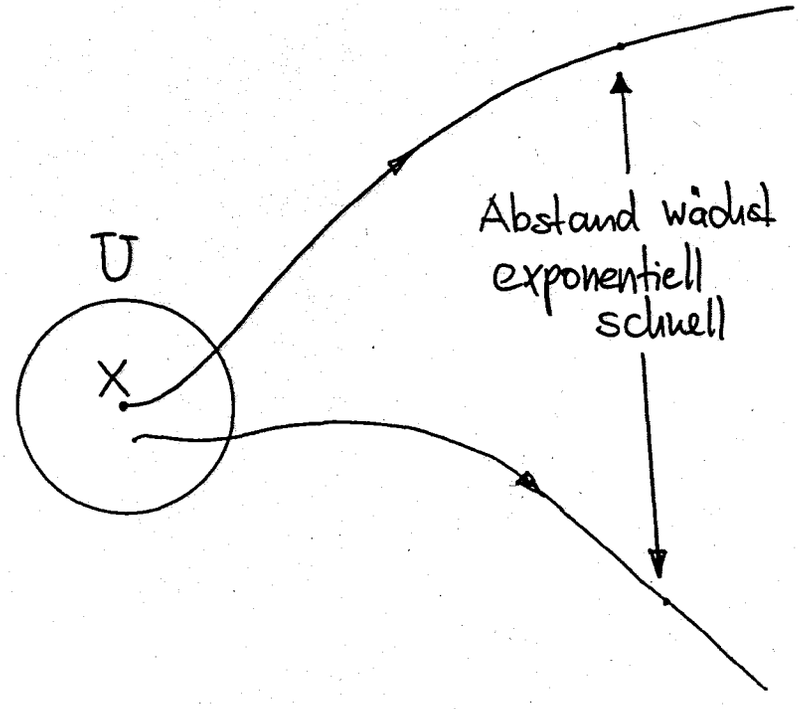

Fig. 11: Sensitivität

Die mathematisch interessante Frage ist: Unter welchen geometrischen Bedingungen tritt chaotisches Verhalten auf, und was für Systeme erfüllen sie? Gerade diese zweite Frage erweist sich als schwierig. Die mir bekannten Resultate beziehen sich alle auf mehr oder weniger einfache Modellprobleme.

Ich möchte im Zusammenhang mit chaotischem Verhalten noch einmal eine Bemerkung zur Numerik machen. Wie man weiss, werden bei chaotischen Systemen viele Computersimulationen durchgeführt. Die Frage ist, ob zwischen den Computerrechnungen und der wirklichen Dynamik ein Zusammenhang besteht, oder ob wir nur akkumulierte Rundungsfehler sehen. Nimmt man an, dass sich infolge der Sensitivität der Abstand zwischen zwei Bahnen pro Schritt verdoppelt, so sieht man, dass nur schon durch einen Fehler im Anfangswert von 10^{-14} das Resultat nach 50 Schritten bei 14-stelliger Rechnung keine einzige signifikante Stelle mehr hat. Andererseits werden tausende von Schritten gerechnet. Interessanterweise kann man für Modellprobleme zeigen, dass es zu numerisch berechneten Approximationen *wirkliche Bahnen* gibt, wobei bei 14-stelliger Rechnung der Fehler zwischen Approximation und Bahn für die ersten 10^7 Schritte von der Grössenordnung 10^{-7} ist. Dabei handelt es sich um *Computer gestützte Beweise*, d. h. ein solcher Beweis muss *für jede einzelne* Bahn durchgeführt werden.

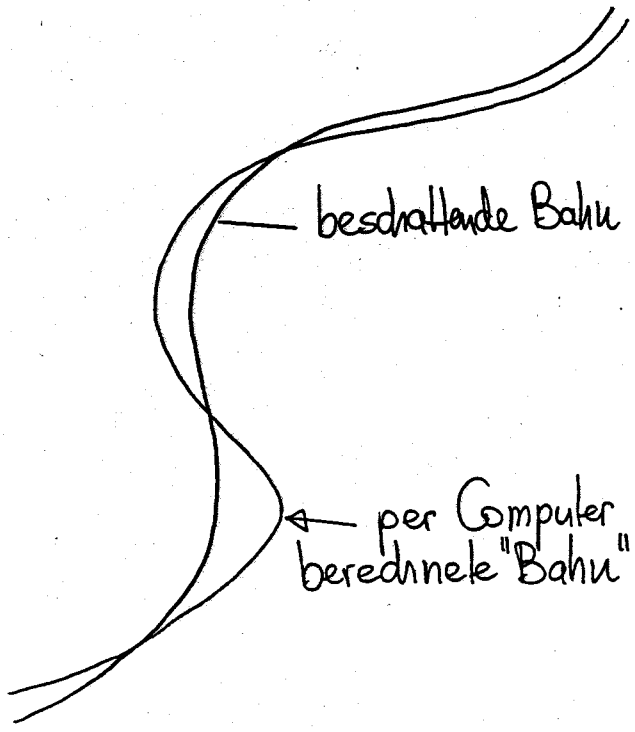

Fig 12: Approximierende Bahn-Schattenbahn

Die Theorie der invarianten Mannigfaltigkeiten auf die ich in diesem ersten Teil vor allem hinweisen wollte, ist u. a. *ein systematischer und universeller Reduktionsvorgang*. Es wird die *Dimension* eines Problems auf die Dimension der Mannigfaltigkeit *reduziert*. Mitunter ist diese Reduktion dramatisch, wenn beispielsweise durch eine sog.*Inertialmannigfaltigkeit* eine *partielle durch eine gewöhnliche Differentialgleichung*, also ein unendlich-dimensionales durch ein endlich dimensionales Problem ersetzt wird. Inertialmannigfaltigkeiten findet man z.B. bei gewissen Reaktions-Diffusionsgleichungen. Der Reduktionsvorgang bedeutet, physikalisch gesprochen, dass *die hochfrequenten Moden in mathematisch rigoroser Weise eliminiert werden.*
Schliesslich will ich anmerken, dass neuestens auch für *stochastische Differentialgleichungen* sog. *Zentrumsmannigfaltigkeiten* eingeführt werden, die in der *stochastischen Verzweigungstheorie* eine Rolle spielen werden.

"In der Mathematik", schreibt Ian Stewart in seinem Buch *The Problems of Mathematics*, "geht es nicht um Formeln und Rechnungen. Es geht um Ideen. Insbesondere geht es darum, wie verschiedene Ideen zusammenhängen. Falls gewisse Tatsachen bekannt sind, stellt sich die Frage, was notwendigerweise daraus folgt. Das Ziel des Mathematikers ist durch Weglassen des Nebensächlichen zum Kern vorzudringen. Es geht nicht nur, oder nicht einmal in erster Linie darum die richtige Antwort auf eine Frage zu finden. Viel wichtiger ist es zu verstehen, warum eine bestimmte Antwort möglich ist, und warum sie gerade so lautet und nicht anders. Gute Mathematik ", sagt Stewart, " hat immer ein Element von Sparsamkeit, und etwas Überraschendes. Vor allem aber hat sie Bedeutung!"
Das ist eine schöne, wie zeitlose Beschreibung. Aber es gibt auch *Trends, Charakteristica* einer Zeit. Ich vermag unsere eigene Epoche gewiss nicht zu überblicken. Aber zwei Merkmale sind doch augenfällig. *Da ist einmal das Phänomen Computer*. Der Computer beeinflusst die Mathematik in verschiedenartiger Weise: Mit dem Rechner kann der Mathematiker *Experimentator* sein und Entdeckungen machen. Ein frühes Beispiel sind die Rechnungen von Fermi, Pasta und Ulam an einem System von 64 schwach nicht-linear gekoppelten Schwingern auf der MANIAC I in Los Alamos im Jahre 1955; das Resultat war überraschend: das System verhielt sich *nicht ergodisch*. Die Entdeckung des Lorenz-Attraktors, des sog. Feigenbaumschen Chaos-Szenariums, die Veranschaulichung von fraktalen Strukturen sind prominente neuere Beispiele. Computeruntersuchungen haben nach Lax bei der Konstruktion von Fundamentalbereichen für gewisse diskrete Gruppen in einer

Arbeit von Mostow eine grosse Rolle gespielt. Die Lancierung eines Supercomputerprojekts durch führende amerikanische Geometer ist ein weiterer Hinweis.

Ein anderer Bereich sind *Computergestützte Beweise.* Aufsehen erregte der Beweis der Vierfarbenvermutung durch Appel und Haken; ein weiteres Beispiel ist die rigorose Etablierung des Feigenbaumszenariums durch Landford; ebenfalls hierhin gehören die Bestimmung realistischer Schranken für die Grösse der Störung in der Kolmogorov-Arnold-Moser Theorie durch Galavotti, Celletti und Chierchia, oder gesicherte Bahnberechnungen in chaotischen dynamischen Systemen durch Yorke und andere, wie oben angedeutet.

Das Medium Computer beeinflusst auch Mathematiker, die selbst keine Computer benutzen, weil es *neue Fragestellungen* hervorbringt, oder Fragen wichtig werden, die zuvor keine Bedeutung hatten. Eine solche Frage ist zum Beispiel : Ist die Art und Weise, wie wir gewohnt sind, zwei komplexe Zahlen zu dividieren, optimal, oder gibt es vielleicht ein Verfahren, das weniger reelle Operationen benötigt?

Die Bedeutung des Computers für die *Angewandte Mathematik* ist offensichtlich: numerische Strömungsberechnung, Tomographie, oder der Entwurf von grossen integrierten Schaltungen sind Beispiele, die jeder kennt. Die Zahl der Anwendungen, die weniger Aufsehen erregen, ist nicht zu ermessen. Leider ist in der Öffentlichkeit da und dort der falsche Eindruck entstanden, der *Computer verdränge die Mathematik.* Richtig ist, dass immer neue Probleme mathematisch beschrieben werden, und dass die *Kombination aus Mathematik, Informatik und Computerkapazität* erfolgreich ist.
Soviel zum Aspekt Computer.

Ein anderer Gesichtspunkt ist der folgende: Manche Mathematiker hatten während längerer Zeit das Gefühl, dass sich die verschiedenen Teilgebiete unabhängig voneinander und sogar voneinander weg entwickelten. Nun aber gibt es einige neue Resultate aufgrund der *Entdeckung von überraschenden Zusammenhängen.* Als Paradebeispiel gilt der Link zwischen Yang-Mills Gleichungen (eine Verallgemeinerung der Maxwell Gleichungen) und Geometrie, mit der überraschenden Konsequenz, dass es im 4-dimensionalen Euklidschen Raum (und notabene nur im 4-dimensionalen) neben der üblichen, auch exotische differenzierbare Strukturen gibt. Es gibt eine Anzahl anderer

Beispiele. Auch die sich immer mehr verwischende Grenze zwischen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen kann in diesem Zusammenhang genannt werden.

Schliesslich möchte ich eine Überlegung zitieren, auf die Lynn Arthur Steen hingewiesen hat und die in gewisser Weise hierher gehört.
Ein wenig wundern sich die Mathematiker ja selbst über die Bedeutung der Mathematik. Und so versteht man schon die Äusserung von Eugene Wigner, der 1960 gesagt hat: "Dass die Sprache der Mathematik so geeignet für die Formulierung der Grundgesetze der Physik ist, ist ein Wunder, ein wunderbares Geschenk, das wir weder verstehen noch verdienen."
In einem Vortrag hat sich 1986 auch der amerikanische Physiker Steven Weinberg über die Mathematik und die Mathematiker gewundert, vorallem über die Tatsache, dass schon mehrmals, als die Physiker eine mathematische Theorie benötigten, diese bereits vorhanden war. Und er gibt folgendes Argument: "Eine ..... Erklärung für die Fähigkeit der Mathematiker, die für die Physik relevante Mathematik vorwegzunehmen, beruht auf der Annahme, dass der Welt eine gewisse Einfachheit zugrunde liegt, dass zutiefst eine gewisse Ordnung vorhanden ist. Die Mathematik ist die Wissenschaft von der Ordnung; der Grund, dass die Mathematiker für die Physik relevante Formen der Ordnung entdecken, könnte darin liegen, dass es vielleicht überhaupt nur eine gewisse Anzahl Formen der Ordnung gibt."

Ich möchte, meine Damen und Herren, ein paar Überlegungen zum *Mathematikunterricht* machen, insbesondere zum *Mathematikunterricht an der Mittelschule* weil die Aus- und Weiterbildung von Mathematiklehrern zu meinen Aufgaben gehört. Ein Gymnasiast besucht etwa tausend Mathematikstunden. *Was ist das Ziel?* In einem Vorschlag, der sich mit den Erfordernissen im Fach Mathematik aus der Sicht der Hochschulen befasst, formuliert eine von der schweizerischen Hochschulrektorenkonferenz eingesetzte Kommission die doppelte Aufgabe des Mathematikunterrichts wie folgt:
"Auf der einen Seite müssen die Studienanfänger Verständnis für die mathematische Denkweise, für mathematische Methoden und für die Bedeutung der Mathematik mitbringen. Auf der anderen Seite muss ein Grundstock an ganz konkreten Kenntnissen sachlicher Art vorhanden sein, damit die Mathematik an der Hochschule eingesetzt und weiterentwickelt werden kann."

Die Inhalte des gymnasialen mathematischen Grundwissens sind mehr oder weniger unstrittig. Sie sind im wesentlichen durch das *Erbe Euklids und das Erbe Newtons* bestimmt. Als Unterrichtsmethode hat sich der sog. *fragend-entwickelnde Unterricht* eingebürgert. Diese Unterrichtsform orientiert sich einerseits an der logischen Struktur eines Gegenstandes und stützt sich andererseits auf die Technik der kleinen Schritte: Ein Thema wird in kleine logische Einheiten zerlegt und daraus aufgebaut.

Zieht man in Betracht, dass die Universitäten alljährlich einige Tausend Studierende aufnehmen können, die einigermassen gute mathematische Grundkenntnisse erworben haben, so kann man feststellen: der Mathematikunterricht ist nicht ohne Erfolge.

Nimmt man allerdings das öffentliche Image des Faches als Anhaltspunkt, kann man nicht zufrieden sein. Die Mathematik gilt als unzugänglich. Viele Schüler erlernen zwar den Umgang mit einer Reihe von mathematischen Techniken, hingegen gelingt es offenbar nur verhältnismässig wenigen, aus ihren Kenntnissen *ein Bild des Faches* zu entwicklen, das Bestand und sogar Auswirkungen hat.
Diese Feststellung ist übrigens keineswegs neu. In der deutschen Übersetzung des bekannten Buches von Richard Courant und Herbert Robbins beginnt das Vorwort mit den Sätzen:
"In der Zeit seit dem Erscheinen der ersten Auflage von *What is Mathematics* im Jahre 1941 ist das allgemeine Interesse an der Mathematik überall erheblich gestiegen. Es wird durch den Unterricht in Schulen und Hochschulen meistens nicht recht befriedigt, trotz mancher Bestrebungen zur Unterrichtsreform".

Der Mathematikuntericht muss im Zusammenhang gesehen werden, einerseits mit der Mathematik als Wissenschaft, andererseits mit Psychologie, Pädagogik und allgemeiner Didaktik. *Die fachwissenschaftliche Seite beeinflusst das Mathematikbild*, dessen Aufbau das eigentliche Ziel des Unterrichts ist. Ich meine nicht, dass es *ein*, sozusagen *das verbindliche Bild* gibt. Aber es geht darum, eine Stoffauswahl zu treffen und einen Weg der Übermittlung zu finden, *so dass das Entstehen eines respektablen Bildes beim Schüler* möglich ist.
Ich möchte hinsichtlich der Stoffwahl durch ein *Beispiel* illustrieren, was ich meine. Vor der Matur ist die Einführung in die Differentialrechnung ein zentraler Stoff. Fragt sich, mit welcher Perspektive. Wenn die Ableitung an der Tangentensteigung eingeführt wird, und Kurvendiskussion und

Flächenbestimmung die einzigen Ziele sind, dann ist der Erkenntniswert der Infinitisimalrechnung nicht gerade gross. Newton hat die Differentialrechnung entwickelt, weil er erkannt hat, *dass Differentialgleichungen das mathematische Objekt sind, das zur Naturbeschreibung benötigt wird.* Ein respektables Bild der Infinitisimalrechnung erfordert deshalb, dass wir diesen fundamentalen Zusammenhang herstellen. Dabei geht es nicht darum, dass man, abgesehen vielleicht von den einfachsten Fällen, versuchen soll, Differentialgleichungen zu behandeln. *Es geht um den Begriff und seine Bedeutung.*

Es ist wichtig, dass im Mathematikunterricht *das Grundsätzliche sichtbar* gemacht wird. Warum ist der Satz des Pythagoras ein interessanter Satz, was ist der Unterschied zwischen dem Satz des Pythagoras und z.B. dem Satz vom gemeinsamen Schnittpunkt der drei Höhen? Was ist eine signifikante Anwendung des Satzes von Pythagoras? Oder: Wie ist es möglich über die Lösung einer Gleichung etwas auszusagen, ohne sie zu berechnen?
Zu einem respektablen Bild gehören auch *Ausblicke*: Was ist Topologie, oder Zahlentheorie? Und warum nicht auch einmal ein *aktuelles Thema* der Mathematik beschreiben, damit die häufig gestellte Frage, ob es denn in der Mathematik überhaupt noch ungelöste Probleme gäbe, beantwortet wird. Nein, das alles muss *nicht geprüft* werden; die Mathematik ist ohnehin auf jeder Stufe mehr als genug an der Selektion beteiligt. Auch das andere Argument, die Schüler hätten ja genug Schwierigkeiten mit dem normalen Stoff, ist nicht mit Sicherheit richtig: wer weiss, was eine etwas weitere Perspektive für eine Wirkung hat?

Natürlich spielt das Mathematikbild des Lehrers eine grosse Rolle. Ein lebendiges Mathematikbild ist das Futter für einen Unterricht, der überzeugen kann. Ich glaube, dass in jedem Stück Mathematik auch die massgebliche didaktische Information steckt; es ist schliesslich das Ergebnis eines Lernprozesses! Didaktik der Mathematik, also das Erkennen von didaktischer Information der Mathematik ist eine zutiefst mathematische Aufgabe, die mathematische Phantasie erfordert. Beides, das Mathematikbild, und die Didaktik der Mathematik erfordern eine *permanente Auseinandersetzung* mit dem Fach, und *Weiterbildung*. Fortbildung braucht Zeit. Deshalb muss sie als Teil der Arbeit des Lehrers betrachtet werden, so, wie in vielen Berufen Fortbildung heute selbstverständlich ist. Sie erfordert ein *gutes Angebot an Weiterbildungsmöglichkeiten.*

Ich versuche, unterstützt durch die Schulleitung der ETH-Zürich, und

gefördert durch die Schweizerische Mathematische Gesellschaft dazu einen Beitrag zu leisten:
1. Durch das *Seminar über Mathematik und Unterricht.* Diesen Zyklus von jeweils acht Vorträgen mit verschiedenen Referenten im Wintersemester an der ETH möchte ich noch durch eine *eintägige Veranstaltung im Sommersemester* mit jeweils wechselndem Tagungsort ergänzen.
2. Durch *Weiterbildungskurse.* Im letzten Jahr konnte ich Weiterbildungskurse in Zürich, in Brig und in St. Moritz durchführen. Die Veranstaltung für die Bündner Mathematiklehrer unter Mitwirkung der Kollegen Blatter, Knörrer, Künsch und von Präsident Bühlmann war besonders vielseitig und, wie ich glaube, gelungen. Da ging es um Chaos und Fraktale, um Zöpfe und Knoten und ihre Bedeutung, um kontraintuitive Beispiele aus der Statistik, um Puts und Calls und wieviel Mathematik dahintersteckt.
3. Durch das *Programm "ETH für die Schule".* Die Schulleitung der ETH hat auf meinen Vorschlag hin eine halbe Stelle zur Verfügung gestellt, die es ermöglicht, unter Mitwirkung des betreffenden Kantons, einen Lehrerkollegen für jeweils einige Monate zur Bearbeitung eines Projekts aus dem Bereich Mathematik und Unterricht an die ETH einzuladen. Mein erster Gast war *Dr. Hansruedi Schneebeli von der Kantonsschule Baden.* Über die Resultate seines Projekts "Raumgeometrie" orientiert er am kommenden Donnerstag im Seminar über Mathematik und Unterricht.

Mathematikunterricht ist der Versuch einem anderen bei der Bildung eines Mathematikbildes *behilflich* zu sein. Die Hilfe kann sehr unterschiedlich sein. Sie kennen jenes Bild aus dem 16. Jahrhundert: Es zeigt einen Schüler mit einem Loch im Kopf, in das ein Trichter, der berühmte *Nürnberger Trichter*, gesteckt ist, in den ein Lehrer einen Kübel Wissen schüttet.
Erich Wittmann von der Universität Dortmund geht von einer Art *systemtheoretischer Analyse* aus. Er vergleicht einen Schüler und erst recht eine Klasse mit einem komplexen System, in dem viele interne Abläufe und Austauschprozesse mit einer ebenfalls komplexen Umgebung in Gang sind. Durch starke Steuerung und detaillierte Kontrolle von aussen wird nun aber die Selbstorganisation eines Systems behindert, statt eines grösstmöglichen Zuwachses an interner Organisation durch spontane Kooperation von autonomen Teilsystemen, bilden sich nur vergleichsweise ärmliche Strukturen aus. Wittmann folgert daraus, dass den Möglichkeiten des Lehrers Wissen und Fertigkeiten zu vermitteln Grenzen gesetzt sind. Anstelle des kleinschrittigen fragend-entwickelnden Unterrichts, tritt er für Lehr-Lernformen ein, in denen der Lehrer eine viel indirektere Rolle spielt, in denen die Schüler aktiv werden

müssen. Wittmann bemerkt, dass derartige Überlegungen allerdings von sog. realistisch eingestellten Lehrern als idealistisch empfunden werden.

Zu meiner Wahl haben mir verschiedene Leute gratuliert, Juristen, Ärzte, Philologen, und sie haben sich mit mir gefreut. Fast alle haben hinzugefügt: ich selbst war ganz schlecht in Mathematik, ich habe überhaupt nicht verstanden, was Mathematik ist. Jeder Mathematiker kennt solche Äusserungen. Sie bedeuten: Hier ist *nicht einmal eine Skizze* entstanden.
Eigentlich ist es doch möglich, Mathematik so zu unterrichten, dass jeder begreifen, zumindest ahnen kann wie faszinierend, ja aufregend Mathematik ist, und dass sie ein Mittel ist um ein paar Dinge besser zu verstehen auf der Welt.

Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89-01	H. Walser	Fraktale
89-02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89-03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89-04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90-01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90-02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
90-03	U. Kirchgraber	Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II