ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Berichte über Mathematik und Unterricht
Herausgeber: U. Kirchgraber

Bericht No. 95–02
September 1995

# Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten

U. Kirchgraber, Zürich

# Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze

U. Kirchgraber und N. Sigrist, Zürich

Eidgenössische Technische Hochschule
CH–8092 Zürich

# Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten*

von
U. Kirchgraber
Departement Mathematik
ETH-Zürich

August 1995

**Zusammenfassung**

Differentialgleichungen behandeln, heisst (fast) nie durch Substitution (und andere Tricks) Lösungsformeln zu produzieren. Differentialgleichungen untersuchen bedeutet Geometrie treiben! Diese Erkenntnis ist nun mehr als hundert Jahre alt und wir verdanken sie dem französischen Mathematiker Jules Henri Poincaré.

In diesem Artikel geht es um die Geometrie in der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes, insbesondere um seine stabile und instabile Mannigfaltigkeit. Diese Ergebnisse gehen auf Poincaré zurück. Wir folgen den Spuren Poincarés und seiner Nachfolger: Jaques Hadamard, Oskar Perron. Und wir schlagen den Bogen bis in die Gegenwart: Die Zahl der Anwendungen der Theorie der invarianten Mannigfaltigkeiten nimmt ständig zu. Im Zwillingsartikel [6] beschreiben wir den Zusammenhang zum Phänomen der Feigenbaum-Universalität.

a) In den Analysisvorlesungen ist jeweils auch ein Kapitel den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet. Ich bin daher fast sicher, dass Ihnen die folgenden Gleichungen wie alte Bekannte vorkommen. Z. B. die Gleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0,$$

man nennt sie *Bernoulli*-Gleichung; oder auch folgende Differentialgleichung

$$y = xy' + g(y'),$$

*Ausgearbeitete Fassung eines Vortrags, den der Autor am 24. 10. 1991 im Seminar über Mathematik und Unterricht der ETH-Zürich gehalten hat.

d. h. die sog. *Clairaut*-Gleichung. Ich könnte auch die *Riccati*-Gleichung oder die Differentialgleichung von *d'Alembert* nennen. Und ich zweifle nicht daran, dass Sie sich dunkel erinnern, dass man diese Differentialgleichungen mit gewissen einigermassen undurchsichtigen Tricks lösen kann. Vielleicht kennen Sie auch das Buch von *E. Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen.* Es enthält Hunderte solcher Gleichungen, mitsamt den einschlägigen Lösungstricks. Tatsächlich haben sich nicht wenige berühmte Mathematiker damit beschäftigt, sog. analytische Lösungen von Differentialgleichungen zu suchen, d. h. es ging darum, Lösungen zu finden, die sich mit Hilfe der elementaren Funktionen, mit unbestimmten Integralen, eventuell mittels höherer transzendenter Funktionen (wie z. B. der Besselfunktionen) darstellen lassen. Die Liste umfasst so illustere Namen wie Leibniz, Euler, Gauss, Lagrange, Laplace, Lord Rayleigh, Jacobi, Lie usw.

Es gab aber ein Problem, das sich von Anfang an allen derartigen Versuchen hartnäckig entzog: das *Dreikörperproblem*, d. h. die Bewegung von drei Massenpunkten, die sich paarweise gemäss dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen.

Gegen Ende des letzten Jahrhunderts wurde klar, dass es eines völlig neuen Ansatzes bedurfte. Den entscheidenden Schritt tat der französische Jahrhundertmathematiker *Henri Poincaré (1854-1912).* Er erkannte, dass die Suche nach analytischen Lösungen fruchtlos, und eigentlich unnütz ist. Statt dessen legte er die Grundlagen für eine genuin geometrische Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Einer der führenden zeitgenössischen Mathematiker, V. Arnold formuliert es mit der für ihn typischen Schärfe so, ich zitiere die englische Übersetzung, [1]: *"The two hundred year interval from the brillant discoveries of Huygens and Newton to the geometrization of mathematics by Riemann and Poincaré seems a mathematical desert, filled by calculations."*

b) Im folgenden will ich einen Ausschnitt aus einer Arbeit Poincarés vorstellen, der sehr schön Poincarés geometrische Denkweise illustriert. Der Gegenstand, um den es geht, ist an und für sich von Interesse. Darüber hinaus zeigt er bis heute Wirkung. Beispielsweise ist er der Schlüssel zum Verständnis der sog. Feigenbaum-Universalität. Dieser Zusammenhang wird in [6], dem Zwillingsartikel zu diesen Ausführungen hier, beschrieben.

Betrachten wir zunächst drei gekoppelte Differentialgleichungen für drei Grössen $y_1, y_2, y_3$, d. h. ein System der Form

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= f_1(y_1, y_2, y_3) \\ \dot{y}_2 &= f_2(y_1, y_2, y_3) \\ \dot{y}_3 &= f_3(y_1, y_2, y_3), \end{cases} \tag{1}$$

dabei sind $f_1, f_2, f_3$ vorgegebene Funktionen. Es sei

$$(y_1(t),\ y_2(t),\ y_3(t))$$

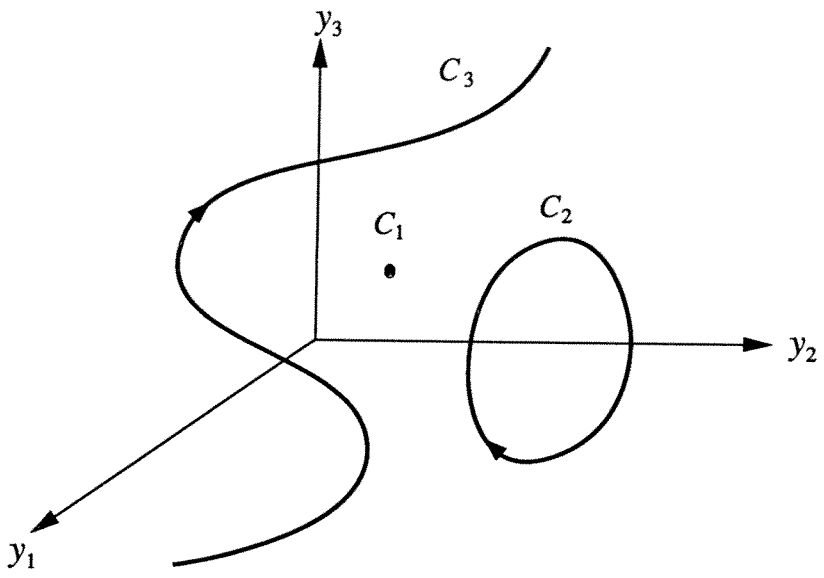



Abbildung 1: Trajektorien

eine Lösung von (1). Eine Lösung definiert eine, durch die Zeit $t$ parametrisierte Kurve $C$ im $(y_1, y_2, y_3)$-Raum:

$$\begin{cases} y_1 &= y_1(t) \\ y_2 &= y_2(t) \\ y_3 &= y_3(t) \end{cases}$$

s. Abb. 1. $C$ heisst *Lösungskurve*, oder *Trajektorie*, oder *Bahn*. Der bekannte *Existenz- und Eindeutigkeitssatz* für gewöhnliche Differentialgleichungen besagt in dieser geometrischen Formulierung, dass durch jeden Punkt des $(y_1, y_2, y_3)$-Raums genau eine Lösungskurve des Systems (1) geht.

Es ist möglich, dass eine Trajektorie nur aus einem einzigen Punkt besteht, s. Abb. 1. Dann spricht man von einer *Gleichgewichtslösung* oder einem *Gleichgewichtspunkt* oder kurz, von einem *Gleichgewicht*. Diese Lösungen sind am leichtesten zu bestimmen; aus $y_1(t) = konstant$, $y_2(t) = konstant$, $y_3(t) = konstant$ folgt, dass die Ableitungen der Funktionen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ identisch verschwinden, und folglich erhält man die Gleichgewichte als Lösungen des folgenden, i. a. nichtlinearen, aber gewöhnlichen Gleichungssystems

$$\begin{cases} f_1(y_1, y_2, y_3) &= 0 \\ f_2(y_1, y_2, y_3) &= 0 \\ f_3(y_1, y_2, y_3) &= 0. \end{cases}$$

Es ist weiter möglich, dass eine Trajektorie eine geschlossene Kurve ist, s. Abb. 1. Man spricht dann von einer *periodischen Lösung*, bzw. von einer *perio-*

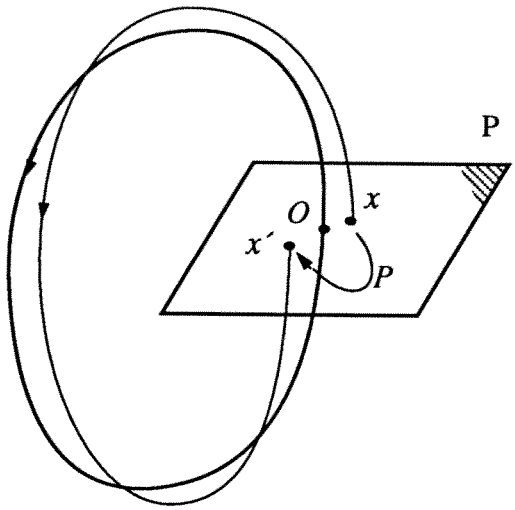



Abbildung 2: Section de Poincaré

*dischen Bahn.* Welche Bedeutung Poincaré den periodischen Lösungen beigemessen hat, zeigt das folgende Zitat: *"Ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est quelles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissons essayer de pénétrer dans une place jusqu' ici reputée inabordable."*

c) Das Auffinden von periodischen Lösungen ist i. a. viel schwieriger als die Bestimmung von Gleichgewichtspunkten. Dennoch hat schon Poincaré Methoden entwickelt um die Existenz von periodischen Lösungen zu zeigen, und er hat seine Resultate mit Erfolg auf das schon zitierte Dreikörperproblem angewandt. Die Existenz periodischer Lösungen ist wahrscheinlich eines der am meisten untersuchten Probleme der Mathematik. Ich möchte mich aber in diesem Artikel nicht damit auseinandersetzen. Nehmen wir einfach an, das gegebene Differentialgleichungssystem (1) habe eine periodische Lösung, und versuchen wir das Verhalten von *benachbarten* Lösungen zu studieren. Dazu hatte Poincaré einen einfachen und doch genialen Einfall. Er betrachtet einen *transversalen Schnitt* $\Pi$, eine "section de Poincaré", wie die Franzosen sagen, d. h. ein Stück einer Ebene, das die geschlossene Trajektorie in einem ihrer Punkte, sagen wir in 0, transversal schneidet, s. Abb. 2

Die Pointe ist dann, dass man die sog. *Poincaré-* oder *Wiederkehrabbildung*

$$P : x \in \Pi \quad \mapsto \quad x' = P(x) \in \Pi$$

einführen kann, dabei ist $x'$ wie folgt definiert, s. Abb. 2: man betrachtet die Bahn von (1) durch den Anfangspunkt $x$ und verfolgt sie, bis sie $\Pi$ erstmals wieder schneidet, der Schnittpunkt ist $x'$.

Die Wiederkehrabbildung $P$ definiert ein sog. *diskretes dynamisches System.*

Seine Bahnen sind Punktfolgen in der section $\Pi$, die durch Anwendung von $P$ und der Inversen $P^{-1}$ auf einen *Anfangspunkt* $x_0$ entstehen

$$\ldots,\ x_{-2} = P^{-1}(x_{-1}),\ x_{-1} = P^{-1}(x_0),\ x_0,\ x_1 = P(x_0),\ x_2 = P(x_1),\ \ldots$$

Die *Vorwärtsbahn* ist die Teilfolge $x_0, x_1, x_2, \ldots$, die *Rückwärtsbahn* besteht aus den Punkten $x_0, x_{-1}, x_{-2}, \ldots$ .

Vergleichen wir die Lösung des Differentialgleichungssystems durch den Anfangspunkt $x_0$ mit der Bahn des durch $P$ definierten diskreten dynamischen Systems durch $x_0$, so sehen wir, dass die diskrete Bahn so etwas wie ein *stroboskopisches Bild* des kontinuierlichen Vorgangs ist. Es ist, wie wenn man die kontinuierliche Lösung immer dann fotographieren würde, wenn sie durch die section $\Pi$ geht. Und natürlich kann man das Langzeitverhalten einer Lösung ganz gut aus ihrem stroboskopischen Bild ablesen.

d) Mit Poincaré, der aufgrund dieses engen Zusammenhangs nun von Differentialgleichungen völlig abstrahiert, wenden wir uns dem Studium von Abbildungen zu.

Der Punkt 0, d. h. der Schnittpunkt der periodischen Bahn mit der section ist ein Fixpunkt von $P$, d. h. es gilt $P(0) = 0$. Die uns interessierende Frage lautet daher: *Wie verhalten sich ebene Abbildungen in der Nähe eines Fixpunktes?*

Wenn wir in der section $\Pi$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit 0 als Nullpunkt einführen hat die Poincaré-Abbildung $P$ folgende Gestalt

$$P\ :\ x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad P(x) = \begin{pmatrix} F(u,v) \\ G(u,v) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Da der Nullpunkt Fixpunkt von $P$ ist, gilt $F(0,0) = 0$, $G(0,0) = 0$. Weil wir $P$ in der Nähe von $x = 0$ untersuchen wollen, ist es naheliegend $F$ und $G$ nach $u$ und $v$ zu entwickeln

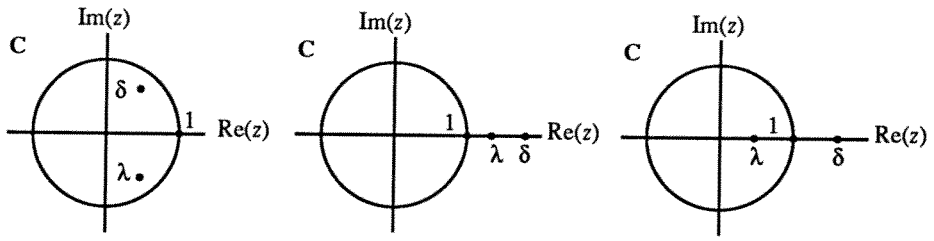
$$\begin{aligned} F(u,v) &= F(0,0) + F_u(0,0)u + F_v(0,0)v + \ldots &&=:\ a_{11}u + a_{12}v + \ldots \\ G(u,v) &= G(0,0) + G_u(0,0)u + G_v(0,0)v + \ldots &&=:\ a_{21}u + a_{22}v + \ldots \end{aligned}$$

dabei bezeichnen die Punkte die Terme von mindestens 2. Ordnung in $u, v$. Somit gilt für $P$ in der Nähe des Fixpunktes $x = 0$ die Darstellung

$$P(x) = Ax + \ldots \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Das Verhalten von $P$ ist, wie sich zeigen wird, in wesentlicher Weise durch die Eigenwerte von $A$ bestimmt. Es sei $p_2(z) = \det(A - zI)$ das charakteristische Polynom von $A$, und $\lambda, \delta$ seine Wurzeln, d. h. die Eigenwerte von A.

Ich referiere zunächst zwei einfache Fälle, die sich leicht untersuchen lassen. Liegen beide Eigenwerte *im Innern des Einheitskreises* der komplexen Ebene, s. Abb. 3a, dann gilt: 0 *ist asymptotisch stabil*, d. h. unter anderem, dass jede Vorwärtsbahn $x_n$, die hinreichend nahe bei 0 startet, gegen 0 strebt für $n \to \infty$.




*0* ist asymptotisch stabil für *P* — a)

*0* ist instabil für *P* — b)

*0* ist hyperbolisch für *P* — c)

Abbildung 3: Lage der Eigenwerte

Liegen beide Eigenwerte *ausserhalb des Einheitskreises*, s. Abb. 3b, dann gilt: 0 *ist instabil*, d. h. jede Vorwärtsbahn (ausser natürlich $x_0 = x_1 = \ldots = 0$) verlässt eine hinreichend kleine Umgebung von 0.

e) Wenden wir uns dem dritten[1], dem uns hier vor allem interessierenden Fall zu, s. Abb 3c. Wir nehmen an, $A$ sei *hyperbolisch*, d. h. es gelte

$$0 < \lambda < 1 < \delta.$$

Um eine Idee über das Verhalten der Abbildung $P$ in diesem Fall zu erhalten, ist es naheliegend, zunächst einmal die höheren Terme in der Entwicklung von $P$ wegzulassen und das *lineare diskrete dynamische System*

$$A: \quad x \quad \mapsto \quad Ax$$

zu betrachten. In der Eigenrichtung zum Eigenwert $\delta$ ist $A$ *expandierend*, in der Eigenrichtung zu $\lambda$ *kontrahierend*. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die expandierende Richtung mit der $u-$Achse, die kontrahierende mit der $v-$Achse zusammenfällt. Die Matrix $A$ hat dann folgende Gestalt

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Aus

$$x_n = Ax_{n-1} = A^2 x_{n-2} = \ldots = A^n x_0 = \begin{pmatrix} \delta^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} \delta^n u_0 \\ \lambda^n v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

können wir für das Verhalten des linearen dynamischen Systems unmittelbar folgendes ablesen, s. Abb. 4.

[1] Die Eigenwerte könen auch noch auf der Einheitskreislinie liegen. Das ist zwar ein Ausnahmefall, ein sog. *kritischer* Fall. Er ist aber von Interesse, besonders wenn die Abbildung $P$ flächentreu ist. Wir können diese Situation hier aber nicht weiter verfolgen.

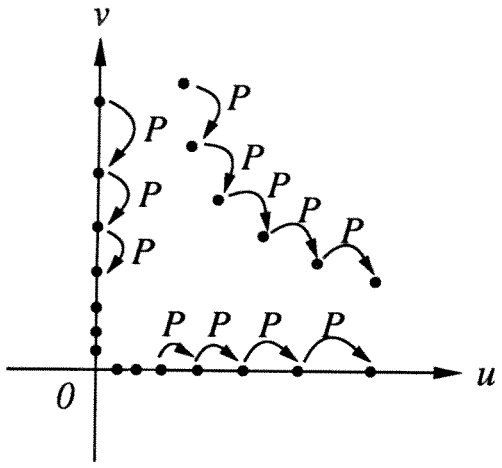



Abbildung 4: Verhalten des linearen Systems

Ist $x_0 \in v$-Achse, folgt $x_1 \in v$-Achse, und daher $x_n \in v$-Achse, für alle $n \geq 0$; man sagt, die $v$-Achse sei *positiv* oder *vorwärts invariant.* Überdies gilt $x_n \to 0$ für $n \to \infty$; d. h. *die Vorwärtsbahn strebt gegen den Fixpunkt* 0. Ähnliches lässt sich über die $u$-Achse sagen: die $u$-Achse ist *rückwärts invariant*, und *Rückwärtsbahnen, die auf der u-Achse starten, streben rückwärts gegen den Fixpunkt* 0. Schliesslich gilt: *Jede Bahn, die weder auf der u-Achse, noch auf der v-Achse startet, strebt sowohl vorwärts, wie rückwärts gegen unendlich.* Da diese Bahnen auf Hyperbeln liegen, nennt man den Fixpunkt eben hyperbolisch.

Es stellt sich als nächstes die grundlegende Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem Verhalten des durch Linearisierung entstandenen diskreten dynamischen System und dem durch $P$ definierten nichtlinearen System. Es ist klar, dass ein Zusammenhang höchstens in der Nähe des Fixpunktes 0 erwartet werden kann. Als Antwort zitiere ich Poincaré, und zwar aus seiner Arbeit *"Sur les courbes définies par les équations différentielles"*, Teil 4, erschienen im Journal de Mathématique, 1886, wobei ich die Bezeichnungen etwas ändere, s. Abb. 5:

*"Je dis que dans ce cas on peut dans le plan normal* $\Pi$ *faire passer deux courbes* $K$ *et* $K'$ *qui rencontrent la trajectoire fermée aux points* $u = 0$, $v = 0$ *et qui, de plus, jouissent des deux propriétés suivantes:*

$1^0$ *On peut mettre leur équation sous la forme*

$$K: \quad u = \varphi(v), \qquad K': \quad v = \psi(u)$$

$\varphi, \psi$ *étant des fonctions holomorphes s'annulant á l'origine.*

$2^0$ *Si le point* $x_0 = (u_0, v_0)$ *est sur l'une courbe* $K, K'$ *il en sera de même du point* $x_1 = (u_1, v_1)$*".*

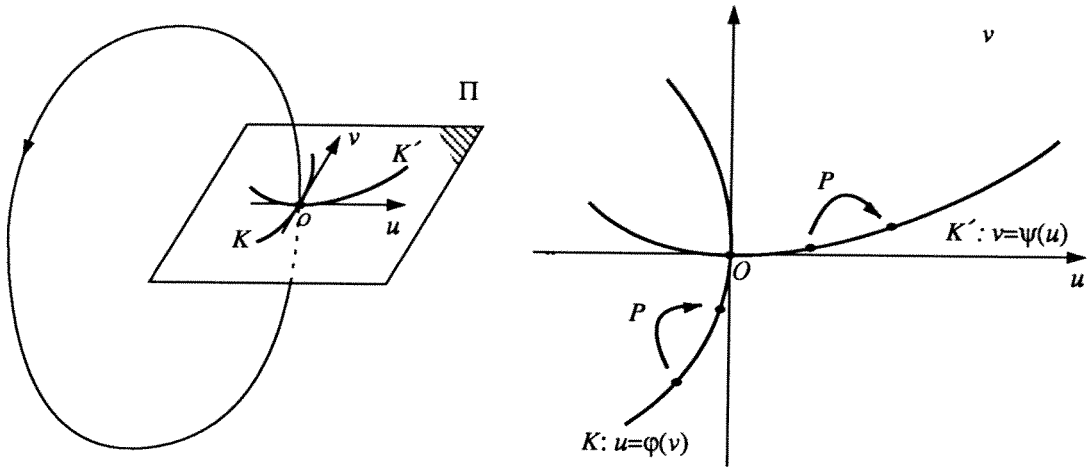



Abbildung 5: Poincarés Kurven $K$ und $K'$

Man erkennt die Analogie zum linearen Fall: die Kurven $K, K'$ übernehmen lokal, d. h. in der Nähe von $x = 0$, die Rollen der $v-$ bzw. der $u-$Achse.

Die Aussage Poincarés ist ein *Existenzsatz*, es wird die Existenz von Kurven $K, K'$ mit gewissen Eigenschaften behauptet. Die Funktionen $\varphi, \psi$, die diese Kurven definieren, können nicht durch eine Formel angegeben werden. Sie werden auf die eine oder andere Art durch einen unendlichen Prozess definiert. Poincaré ist wie folgt vorgegangen: Zunächst stellt er eine Gleichung für die unbekannte Funktion $\varphi$ aufgrund der Invarianzeigenschaft $2^0$ auf: mit dem Punkt

$$(\varphi(v), v)$$

ist auch sein Bild

$$P(\varphi(v), v) = (F(\varphi(v), v), G(\varphi(v), v))$$

ein Punkt der Kurve $K$, d. h. es gilt

$$F(\varphi(v), v) = \varphi(G(\varphi(v), v)). \tag{3}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Funktionen

$$F = \delta u + f(u, v), \qquad G = \lambda v + g(u, v)$$

in der Umgebung von $u = v = 0$ analytisch sind, lassen sich $f$ und $g$ als Potenzreihen in $u$ und $v$ darstellen. Für die unbekannte Funktion $\varphi$ macht Poincaré den Ansatz

$$\varphi(v) = \varphi_2 v^2 + \varphi_3 v^3 + \varphi_4 v^4 + \dots$$

Indem man diese Potenzreihen in die Invarianzgleichung (3) einsetzt, lassen sich die unbekannten Koeffizienten $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ sukzessive durch Koeffizientenvergleich bestimmen. Die abschliessende Frage ist, ob die gefundene Reihe konvergiert. Poincaré führt diesen Beweis mit der Majorantenmethode, d. h. er findet eine analytische Funktion

$$\Phi(v)$$

deren Koeffizienten $\Phi_i$ die $\varphi_i$ majorisieren, d. h. es gilt

$$|\varphi_i| \leq \Phi_i.$$

Damit ist die Konstruktion von $K$ abgeschlossen. Poincaré fügt hinzu, dass man $K'$ analog erhält und vermerkt weitere Eigenschaften: *Eine Bahn (von P), die auf K startet, strebt vorwärts gegen* 0, *eine Bahn, die auf K' startet, strebt rückwärts gegen* 0, *jede andere Bahn verlässt vorwärts und rückwärts eine geeignet gewählte Umgebung des Fixpunktes* 0. Poincarés Kurve $K$ (bzw. $K'$) nennt man heute die *lokale stabile* (bzw. *instabile*) *Mannigfaltigkeit* des hyperbolischen Fixpunktes 0 der Abbildung $P$, und bezeichnet sie mit $W^+_{\text{loc}}$ (bzw. $W^-_{\text{loc}}$).[2]

Für die periodische Lösung $y^p(t) = (y_1^p(t), y_2^p(t), y_3^p(t))$ des Differentialgleichungssystems (1), die im $y_1 - y_2 - y_3$–Raum eine geschlossene Kurve $C^p$ definiert, bedeutet Poincarés Resultat folgendes: $C^p$ hat zwei "Kragen" $M^+_{loc}$, $M^-_{loc}$, die sich in $C^p$ transversal schneiden. Betrachtet man eine Lösung $y(t)$ von (1), die in $M^+_{loc}$ (bzw. $M^-_{loc}$) startet, so strebt sie für $t \to \infty$ (bzw. $t \to -\infty$) gegen die geschlossene Kurve $C^p$. Ansonsten verlässt sie vorwärts und rückwärts eine hinreichend kleine Umgebung von $C^p$. $y^p(t)$ ist also im wesentlichen instabil, nur gerade, wenn man auf $M^+_{loc}$ startet, strebt man (vorwärts) gegen $y^p(t)$.

f) Fünfzehn Jahre später befasst sich Poincarés Landsmann *Jacques Hadamard (1865-1963)*, selbst ein bedeutender Mathematiker, mit diesem Problem Poincarés. Sein Artikel *"Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles"* ist 1901 im Bulletin de la Société mathématique de France erschienen. Zur Einleitung schreibt Hadamard: *"Il m'a paru intéressant de traiter la même question (wie Poincaré) au point de vue exclusivement réel et sans faire intervenir l'analyticité des donnés"*.

Vordergründig scheint es Hadamard um eine Abschwächung von Poincarés Regularitätsvoraussetzung zu gehen. Tatsächlich verbirgt sich hinter seiner bescheidenen Ankündigung eine ganz andere, eine geometrische Konstruktion von Poincarés Kurven $K, K'$. Ausgangspunkt ist folgende *Bemerkung*: Betrachten Sie einen hinreichend schmalen Streifen um die $u$–Achse und eine Kurve $C$, die *"hinreichend flach"* sei bezüglich der $v$–Achse. Betrachten Sie das Urbild von $C$

[2] Aus $W^{\pm}_{\text{loc}}$ kann man durch wiederholte Anwendung von $P$ und $P^{-1}$ die sog. *globale* stabile (bzw. instabile) Mannigfaltigkeit $W^+$ (bzw. $W^-$) gewinnen. Es ist eine berühmte Geschichte, dass, und wie Poincaré entdeckte, dass $W^+$ und $W^-$ sich in sog. *transversalen homoklinen Punkten* schneiden können, und dass daraus "chaotisches" Verhalten des durch die Abbildung $P$ erzeugten diskreten dynamischen Systems resultiert, für eine Einführung s. [3].

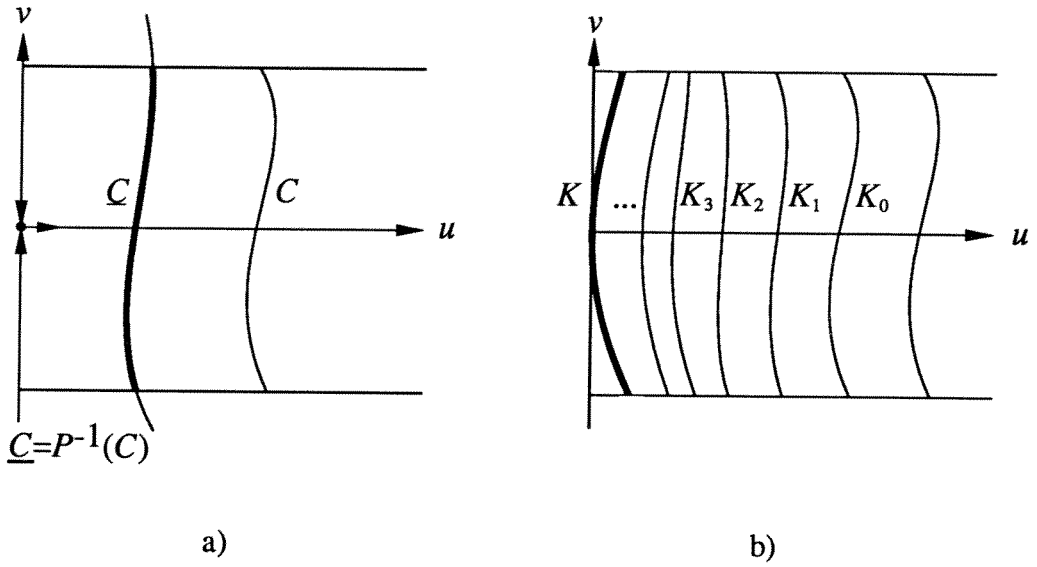



Abbildung 6: Hadamards Konstruktion

unter $P$. Da $P$ in $u-$Richtung expandierend, in $v-$Richtung kontrahierend ist, ist umgekehrt $P^{-1}$ in $u-$Richtung kontrahierend und in $v-$Richtung expandierend. Man wird deshalb erwarten, dass das Urbild $P^{-1}(C)$ von $C$ wieder eine "flache Kurve" ist, und etwa die aus Abb. 6a ersichtliche Gestalt hat.

Indem man die über den Streifen hinausreichenden "Schwänze" von $P^{-1}(C)$ abschneidet, erhält man eine "flache Kurve" $\underline{C}$ für die gilt

$$P(\underline{C}) \subset C$$

Die Rechnung, die im Anhang ausgeführt ist, bestätigt die Richtigkeit dieser Bemerkung.

*Hadamards Konstruktion* verläuft nun wie folgt, s. Abb. 6b. Man wählt eine "flache Ausgangskurve" $K_0$ und konstruiert eine Folge von Kurven $K_1, K_2, K_3, \ldots$, wobei $K_1 = \underline{K_0}, K_2 = \underline{K_1}, \ldots$, im Sinne der obigen Bemerkung gesetzt wird. Die Analyse zeigt (s. Anhang), dass *die Folge der Kurven $K_1, K_2, K_3, \ldots$ gegen eine Grenzkurve $K$ konvergiert, und dass $K$ genau Poincarés lokale stabile Mannigfaltigkeit ist.*

g) Lassen Sie mich eine Ergänzung anfügen. Man kann sich fragen *wie schnell* die Kurven $K_i$ gegen die Grenzkurve $K$ konvergieren. Um die Antwort formulieren zu können, benutzen wir, dass die Kurven $K_i$ und $K$ als Graphen von Funktionen geschrieben werden können. Es gilt

$$\begin{aligned} K_i &: \; u = s_i(v) \\ K &: \; u = s_\infty(v). \end{aligned}$$

Betrachten wir die Differenz

$$s_\infty(v) - s_i(v);$$

sie strebt gegen Null, weil die Kurven $K_i$ gegen die Kurve $K$ konvergieren. Die Pointe ist nun, dass sogar die folgende Behauptung gilt.

**Satz 1** *Die Folge*

$$\delta^i[s_\infty(v) - s_i(v)]$$

*konvergiert für $i \to \infty$ gleichmässig gegen eine stetige Grenzfunktion.*

Man beachte, dass die Folge $\delta^i$ gegen unendlich divergiert, weil ja $\delta$ den grösseren der beiden Eigenwerte von $A$ bezeichnet. Qualitativ besagt das Resultat, dass die $K_i$ wie eine geometrische Folge gegen $K$ konvergieren, wobei

$$\frac{1}{\delta}$$

der *Konvergenzfaktor* ist.

Dieser Satz ist aus mindestens zwei Gründen interessant. Einmal kann man ihn gebrauchen, wenn es darum geht, die lokale stabile Mannigfaltigkeit numerisch zu approximieren. Zweitens spielt er bei der Aufklärung der schon erwähnten Feigenbaum-Universalität eine wichtige Rolle, s. [6].

Ein Beweis von Satz 1 ist in [2] gegeben. Der im folgenden für speziell interessierte Leser skizzierte Beweis ist in [4] ausgeführt.

Hinsichtlich der Abbildung $P$, s. Gl. (2), kann man sich im wesentlichen auf folgende Situation beschränken

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \delta u + \hat{F}(u,v)u \\ G(u,v) &= \lambda v + \hat{G}(u,v), \end{aligned}$$

wobei $\hat{F}$, $\hat{G}$ Störterme, also klein, sind, und überdies soll $\hat{F}(u,0) = 0$ und $\hat{G}(u,0) = 0$ gelten. Geometrisch bedeutet das: Die Achsen sind invariant, und die Einschränkung von $P$ auf die $u-$Achse ist die lineare Expansion $u \mapsto \delta u$.

Setzen wir

$$S_i(v) := \delta^i s_i(v) \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei die Funktionen $s_i$ nach Hadamard konstruiert seien. Es geht darum, zu zeigen, dass $\lim_{i\to\infty} S_i(v)$ existiert.

Wir definieren die folgenden Abbildungen, s. Abb. 7

$$\begin{aligned} v &\mapsto \mathcal{S}_j(v) &:= (s_j(v), v) \in \mathsf{R}^2 \\ v &\mapsto \psi_j(v) &:= G(s_j(v), v) \in \mathsf{R} \\ v &\mapsto \psi(v) &:= G(0, v) \in \mathsf{R}. \end{aligned}$$

Ein erster Schritt besteht darin, die folgende Formel herzuleiten

$$S_i(v) = \frac{s_0 \circ \psi_1 \circ \psi_2 \circ \ldots \circ \psi_i(v)}{\sigma_i(v)}, \tag{4}$$

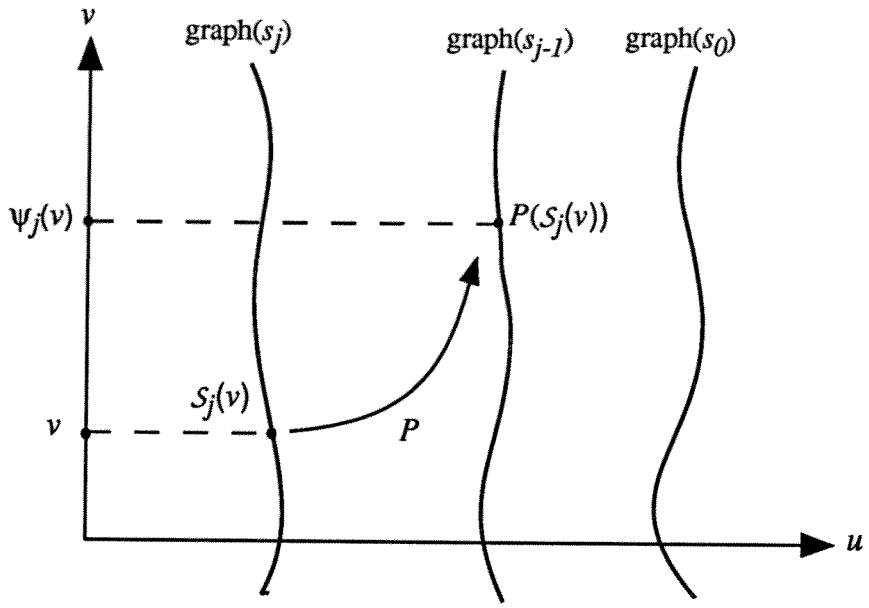



Abbildung 7: Definition der Abbildungen $\mathcal{S}, \psi_j, \psi$

wobei

$$\sigma_i(v) := \prod_{j=1}^{i} [1 + \hat{F} \circ P^{j-1} \circ \mathcal{S}_i(v)]$$

gesetzt ist. Es ist leicht zu sehen, dass

$$\lim_{i \to \infty} \psi_1 \circ \psi_2 \circ \ldots \circ \psi_i(v) = 0 \tag{5}$$

gilt. Die Hauptaufgabe ist, zu zeigen, dass die Folge $\sigma_i$ konvergiert. Sie wird mit der Folge

$$\tau_i(v) := \prod_{j=1}^{i} [1 + \hat{F}(\psi^{j-1}(v), 0)]$$

verglichen. Es ist nicht schwer einzusehen, dass diese Folge konvergiert; ihr Grenzwert heisse $\tau(v)$. Die verbleibende technische Aufgabe ist, zu zeigen, dass

$$\lim_{i \to \infty} \sigma_i(v) = \tau(v) \tag{6}$$

gilt. Aus (4),(5), und (6) folgt dann

$$\lim_{i \to \infty} S_i(v) = \frac{s_0(0)}{\tau(v)}.$$

Soweit ein paar Bemerkungen zu Satz 1.

h) Fast dreissig Jahre nach Hadamard beschäftigte sich der deutsche Mathematiker *Oskar Perron (1880-1975)* in einer Arbeit mit dem Titel *"Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen"*, die 1928 in der Mathematischen Zeitschrift erschien, mit unserem Problem. Im Gegensatz aber zu Poincaré und Hadamard, arbeitete Perron jedoch nicht mit Abbildungen, sondern direkt an Differentialgleichungen. Wir skizzieren den grundlegenden Gedankengang. Betrachten wir das folgende System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} \dot{u} &= au + U(w) \\ \dot{v} &= bv + V(w). \end{cases} \tag{7}$$

Der Punkt bedeutet Ableitung nach der Zeit $t$, es ist $w = (u, v)$ gesetzt, $a$ ist eine positive, $b$ eine negative Konstante, es gilt $U(0) = V(0) = 0$, und $U, V$ sind Störungen, also klein.

Offenbar ist $u(t) \equiv 0, v(t) \equiv 0$ Gleichgewichtslösung des Systems (7). Vernachlässigt man einen Augenblick die Störterme in (7), erkennt man folgendes Verhalten der Trajektorien in der $u - v-$Ebene. Bahnen, die auf der $v-$Achse (bzw. $u-$Achse) starten, streben für $t \to \infty$ (bzw. $t \to -\infty$ ) gegen das Gleichgewicht 0, alle anderen Bahnen laufen vorwärts und rückwärts von 0 weg. Das ist hyperbolisches Verhalten!

Wenden wir uns der Frage zu, wie man nach Perron die (lokale) stabile Mannigfaltigkeit $u = s_\infty(v)$ konstruiert. Es bezeichne $z(t, u_0, v_0)$ die Lösung von (7), die sich zur Zeit $t = 0$ am Punkt $(u_0, v_0)$ befindet. Denken wir uns $z(t, u_0, v_0)$ in den Störterm $U$ der ersten Gleichung (7) eingesetzt, erhalten wir eine *lineare inhomogene* Differentialgleichung für die Komponente $u(t)$ von $z(t, u_0, v_0)$:

$$\dot{u} = au + U(z(t, u_0, v_0)).$$

Mit der bekannten Variation-der-Konstanten-Formel ergibt sich für $u(t)$ die Darstellung

$$u(t) = e^{at}\, u_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}\, U(z(\tau, u_0, v_0))\, d\tau. \tag{8}$$

Wählen wir nun speziell einen Anfangspunkt $(u_0, v_0)$, der auf der (zu bestimmenden) stabilen Mannigfaltigkeit liegt, dann gilt $u_0 = s_\infty(v_0)$. Aus (8) folgt dann

$$e^{-at}\, u(t) = s_\infty(v_0) + \int_0^t e^{-a\tau}\, U(z(\tau, s_\infty(v_0), v_0))\, d\tau. \tag{9}$$

Da die Lösung $(u(t), v(t))$ für $t \geq 0$ auf der stabilen Mannigfaltigkeit liegt, gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ und daher erst recht $\lim_{t\to\infty} e^{-at}\, u(t) = 0$. Bilden wir in Gl. (9) den Grenzübergang $t \to \infty$, erhalten wir

$$s_\infty(v_0) = -\int_0^\infty e^{-a\tau}\, U(z(\tau, s_\infty(v_0), v_0))\, d\tau. \tag{10}$$

Gl. (10) ist eine Fixpunktgleichung für die gesuchte Funktion $s_\infty$. Da $U$ nach Voraussetzung klein ist, lässt sich (10) mit dem Kontraktionssatz behandeln.

i) Die grosse Bedeutung von Hadamards (und Perrons[3]) Konstruktion liegt darin, dass sie flexibel ist, und dass sie deshalb zu immer allgemeineren Resultaten geführt hat. Zunächst erkennt man, dass Hadamards Konstruktion keineswegs auf ebene Abbildungen beschränkt ist. Es sei

$$P : \mathsf{R}^n \mapsto \mathsf{R}^n$$

eine Abbildung des $\mathsf{R}^n$ in sich, 0 Fixpunkt von $P$, i. e. $P(0) = 0$. Weiter sei $A = dP(0)$ die Jacobische Matrix von $P$ am Fixpunkt 0. Hinsichtlich der Eigenwertstruktur der Matrix machen wir, in Verallgemeinerung des bisherigen, folgende Voraussetzung. Für die Eigenwerte

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \qquad \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_q \qquad p + q = n$$

von $A$ gilt: Die $\lambda_i$ liegen im Inneren des Einheitskreises, d. h. es gilt $|\lambda_i| < 1$ für $i = 1, \ldots, p$; die $\delta_i$ liegen ausserhalb des Einheitskreises, d. h. es gilt $|\delta_i| > 1, i = 1, \ldots, q$. Dann gibt es eine $p-$dimensionale Fläche $W^+_{\text{loc}}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) 0 liegt in $W^+_{\text{loc}}$; $W^+_{\text{loc}}$ ist in 0 tangential an den Raum, der von den Eigenräumen zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ aufgespannt wird.

b) $W^+_{\text{loc}}$ ist positiv invariant und Vorwärtsbahnen mit Anfangspunkten in $W^+_{\text{loc}}$ streben gegen 0.

Analoge Eigenschaften gelten für die entsprechende $q-$dimensionale Fläche $W^-_{\text{loc}}$.

Natürlich konstruiert man etwa $W^+_{\text{loc}}$ wieder mit dem Verfahren von Hadamard. Die $K_i$ sind dann $p-$dimensionale Flächen im $\mathsf{R}^n$. Im Spezialfall $p = n - 1, q = 1$, d. h. falls $W^+_{\text{loc}}$ $n-1$-dimensional ist, oder, wie man auch sagt, falls $W^+_{\text{loc}}$ Codimension 1 hat, gilt die frühere Bemerkung über die Konvergenzgeschwindigkeit der Flächen Graph$(K_i)$ gegen die Grenzfläche $W^+_{\text{loc}}$ wie zuvor, s. Satz 1: Der Konvergenzfaktor ist unverändert $\frac{1}{\delta}$, wobei $\delta$ der einzige Eigenwert bezeichnet, für den $\mid \delta \mid > 1$ gilt.

Betrachten wir eine weitere Verallgemeinerung. Es sei weiterhin $P$ eine Abbildung des $\mathsf{R}^n$ in sich. Es sei $M$ eine $m$-dimensionale Fläche; sie sei geschlossen oder unbeschränkt, jedenfalls ohne Rand. $M$ sei punktweise invariant bezüglich $P$ und $P^{-1}$ (d. h. es gilt $P(x) = x$ für $x \in M$.). Weiter machen wir folgende Annahme. In zu $M$ *normaler* Richtung sei $P$ expandierend. Diese Voraussetzungen haben folgende Konsequenzen. Betrachtet man einen Punkt ausserhalb von $M$ und seine Rückwärtsbahn, so strebt diese gegen $M$ (sie strebt sogar gegen einen *Punkt* auf $M$!), $M$ ist daher rückwärts attraktiv bezüglich $P$.

Es sei $\hat{P}$ eine zweite Abbildung des $\mathsf{R}^n$ in sich. $\hat{P}$ sei eine Störung von $P$, d. h. die Differenz $\hat{P} - P$ sei (in einer geeigneten Norm) hinreichend klein. Dann gilt

[3]Im folgenden besprechen wir weitere Resultate für Abbildungen. Man kann sie auf Differentialgleichungen übertragen, s. z. B. [5], oder aber mithilfe von Perrons Methode direkt für Differentialgleichungen herleiten.

folgendes. Es gibt eine $m-$dimensionale Fläche $\hat{M}$, die nahe bei $M$ liegt (umso näher, je kleiner die Differenz zwischen $\hat{P}$ und $P$ ist), die bezüglich $\hat{P}$ invariant und rückwärts attraktiv ist. Jede Rückwärtsbahn von $\hat{P}$, die hinreichend nahe bei $\hat{M}$ startet, strebt gegen eine Rückwärtsbahn von $\hat{P}$ auf $\hat{M}$. Derartige Verallgemeinerungen der Ideen von Hadamard wurden von N. Fenichel und M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub entwickelt; eine ausführliche Darstellung findet man in [7].

Was ist die Bedeutung eines solchen Resultats? Geht es um das Verhalten von Rückwärtsbahnen bezüglich $\hat{P}$, die in der Nähe von $\hat{M}$ starten, so genügt es offenbar im wesentlichen die Dynamik von $\hat{P}^{-1}$ auf $\hat{M}$ zu studieren. Dies bedeutet aber, dass man es statt mit einem $n-$dimensionalen, mit einem $m-$dimensionalen System zu tun hat. Dieser Umstand ist umso bedeutender, je grösser die Differenz zwischen $m$ und $n$ ist. Besonders dramatisch ist die Situation, wenn der zugrunde liegende Raum nicht der endlich-dimensionale Raum $\mathsf{R}^n$ ist, sondern ein unendlich-dimensionaler Raum. Diese Situation tritt auf, wenn wir *partielle* Differentialgleichungen betrachten. Diese "leben" natürlicherweise in unendlich-dimensionalen Räumen. Wenn es gelingt, eine endlich-dimensionale attraktive invariante Mannigfaltigkeit für eine partielle Differentialgleichung zu finden, so bedeutet die Einschränkung der Dynamik auf die invariante Mannigfaltigkeit die Reduktion der partiellen Differentialgleichung auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Und eine solche Reduktion bedeutet natürlich eine entscheidende Vereinfachung des Problems.

Dimensionsreduzierende Techniken sind Gegenstand aktueller Forschung. Zur Illustration zitiere ich aus einem 1991 erschienenen Übersichtsartikel, [8]:

*"When it exists, an exact invariant manifold is a smooth, finite-dimensional manifold that contains the global attractor and attracts all orbits at an exponential rate; hence, for all practical purposes, most of the dynamics of a system takes place on such a manifold. It is noteworthy that a related concept was introduced independently in meteorology under the name "slow manifold". Meteorologists worldwide use numerical algorithms derived from the use of slow manifolds for short-term weather prediction. A significant contribution of the theory of invariant manifolds is that it produces the mathematical foundation and justification of the theory of slow manifolds.*

*Unfortunately, the existence of invariant manifolds has been neither proved nor disproved for many physically relevant equations. For several years the existence of invariant manifolds for the Navier-Stokes equations was an open question. Very recently, Minkyu Kwak, a graduate student at the University of Minnesota at Minneapolis, actually established the existence of invariant manifolds for the Navier-Stokes equations with suitable boundary conditions".*

Obwohl über 100 Jahre alt, sind die die Ideen von Poincaré, Hadamard und Perron also weiterhin höchst fruchtbar.

# Literatur


[1] Arnold, V.I: *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, 1990, p. 80.

[2] Collet, P., Eckmann, J.P., Lanford, O.E.: *Universal properties of maps on an interval*, Comm. Math. Physics 76 (1980) 211.

[3] Kirchgraber, U.: *Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen*, Elemente der Mathematik 47 (1992) 137.

[4] Kirchgraber, U.: *On the speed of convergence in Hadamards graph transform method*, in Vorbereitung.

[5] Kirchgraber, U. and Palmer, K.J: *Geometry in the neighborhood of invariant manifods of maps and flows and linearization*, 1990.

[6] Kirchgraber, U. und Sigrist, N.: *Feigenbaum-Universalität: Eine heuristische Annäherung*, s. den nachfolgenden Artikel.

[7] Wiggins, S.: *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems*, 1994.

[8] *Inertial Manifolds in Scientific Computing*, SIAM News, September 1991, p. 8-9.


# A Details der Konstruktion von Hadamard

Wir betrachten eine sogenannte globale Version des Satzes von Hadamard. Es sei

$$P : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathsf{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta u + \epsilon \hat{f}(u,v) \\ \lambda v + \epsilon \hat{g}(u,v) \end{pmatrix} \in \mathsf{R}^2$$

wobei wir also annehmen, die Abbildung $P$, d. h. insbesondere die Funktionen $\hat{f}, \hat{g}$ seien auf der ganzen $u$-$v$-Ebene definiert; überdies nehmen wir an, $\hat{f}$ und $\hat{g}$ seien Lipschitz-Funktionen, d. h. es gibt eine Konstante $c$, sodass

$$\begin{aligned} |\hat{f}(u,v) - \hat{f}(u',v')| &\leq c|u-u'| + c|v-v'| \\ |\hat{g}(u,v) - \hat{g}(u',v')| &\leq c|u-u'| + c|v-v'| \end{aligned} \tag{11}$$

für beliebige Paare $(u,v),(u',v')$ gilt. (Diese Bedingung ist erfüllt, falls $\hat{f}, \hat{g}$ differenzierbare Funktionen sind, und die partiellen Ableitungen $\partial\hat{f}/\partial u, \ldots, \partial\hat{g}/\partial v$ durch eine Konstante $c$ beschränkt sind.) Weiter nehmen wir an, dass $\hat{f}$ durch $c$ beschränkt ist, d.h. es gilt

$$|\hat{f}(u,v)| \leq c \tag{12}$$

für alle $(u, v)$. Für $\delta, \lambda$ gelte

$$0 < \lambda < 1 < \delta \tag{13}$$

Schliesslich ist $\epsilon > 0$ ein *Störungsparameter*, d. h. durch hinreichend kleine Wahl von $\epsilon$ unterscheidet sich $P$ beliebig wenig von der linearen Abbildung $P_0 : (u, v)^T \mapsto (\delta u, \lambda v)^T$. $P_0$ besitzt die $v$-Achse $u = 0$ als invariante Mannigfaltigkeit. Unser Ziel ist, *zu zeigen, dass es für $\epsilon$ hinreichend klein, eine Funktion*

$$s_\infty : v \in \mathsf{R} \mapsto s_\infty(v) \in \mathsf{R}$$

*gibt, deren Graph*

$$C_\infty := \{x = \begin{pmatrix} s_\infty(v) \\ v \end{pmatrix} \mid v \in \mathsf{R}\}$$

*invariant ist unter $P$, d. h. aus $x \in C_\infty$ folgt $P(x) \in C_\infty$.*

Wir führen folgende Klasse von Funktionen ein

$$\mathcal{S} := \{s : \mathsf{R} \to \mathsf{R} \mid \sup_{v \in \mathsf{R}} |s(v)| < \infty, |s(v) - s(v')| \leq |v - v'| \text{ für alle } v, v'\}$$

$\mathcal{S}$ besteht also aus allen beschränkten Funktionen, die 1-lipschitz sind, d. h. es sind Lipschitz-Funktionen deren Lipschitz-Konstante gleich 1 ist.

Wir behaupten zunächst:

*Für alle hinreichend kleinen $\epsilon$ gilt: Zu $s \in \mathcal{S}$ gibt es $\underline{s} \in \mathcal{S}$ derart, dass der Graph $\underline{C}$ von $\underline{s}$ durch $P$ in den Graph $C$ von $s$ abgebildet wird* (14)

Zum Beweis formulieren wir als erstes eine Gleichung für $\underline{s}$. Nehmen wir an, die Behauptung (14) stimmt. Es ist $(\underline{s}(v), v)^T$ ein Punkt von $\underline{C}$; sein Bild unter $P$ ist

$$\begin{pmatrix} \delta \underline{s}(v) + \epsilon \hat{f}(\underline{s}(v), v) \\ \lambda v + \epsilon \hat{g}(\underline{s}(v), v) \end{pmatrix};$$

damit dieser Punkt in $C$ liegt, muss

$$\delta \underline{s}(v) + \epsilon \hat{f}(\underline{s}(v), v) = s(\lambda v + \epsilon \hat{g}(\underline{s}(v), v))$$

oder

$$\underline{s}(v) = -\frac{\epsilon}{\delta} \hat{f}(\underline{s}(v), v) + \frac{1}{\delta} s(\lambda v + \epsilon \hat{g}(\underline{s}(v), v)) \tag{15}$$

gelten. Umgekehrt gilt: Ist $\underline{s} \in \mathcal{S}$ eine Lösung von (15), so ist (14) nachgewiesen. Wir zeigen also, dass (15) eine Lösung hat. Zunächst sei $v$ beliebig, aber fest; wir betrachten die Abbildung

$$T : \underline{s} \in \mathsf{R} \mapsto T(\underline{s}) := -\frac{\epsilon}{\delta} \hat{f}(\underline{s}, v) + \frac{1}{\delta} s(\lambda v + \epsilon \hat{g}(\underline{s}, v)) \in \mathsf{R}$$

Mit (11) und weil $s$ 1-lipschitz ist, folgt nach kurzer Rechnung unter Verwendung der Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$|T(\underline{s}) - T(\underline{s}')| \leq 2\frac{\epsilon}{\delta}c|\underline{s} - \underline{s}'|$$

für alle $\underline{s}, \underline{s}'$. Für alle hinreichend kleinen $\epsilon$ gilt $2\frac{\epsilon}{\delta}c < 1$, d. h. $T$ ist eine Kontraktion auf $\mathsf{R}$ und besitzt daher nach dem Kontraktionsprinzip einen Fixpunkt, den wir mit $\underline{s}(v)$ bezeichnen, um zum Ausdruck zu bringen, dass er i. a. von der Wahl von $v$ abhängt. Die Fixpunktgleichung $\underline{s}(v) = T(\underline{s}(v))$ ist mit (15) identisch, und somit wissen wir jetzt, dass (15) eine Lösung hat. Um einzusehen, dass die so erhaltene Funktion $\underline{s}(v)$ in $\mathcal{S}$ ist, müssen wir zeigen, das $\underline{s}$ beschränkt und 1-lipschitz ist. Die Beschränktheit von $\underline{s}$ folgt aus der Beschränktheit von $\hat{f}$, cf. (12), und derjenigen von $s$. Nun rechnen wir nach, dass $\underline{s}$ für $\epsilon$ hinreichend klein 1-lipschitz ist. Aus (15) folgt mit den Abkürzungen $\underline{s} = \underline{s}(v), \underline{s}' = \underline{s}(v')$

$$\underline{s} - \underline{s}' = -\frac{\epsilon}{\delta}[\hat{f}(\underline{s}, v) - \hat{f}(\underline{s}', v')] + \frac{1}{\delta}[s(\lambda v + \epsilon\hat{g}(\underline{s}, v)) - s(\lambda v' + \epsilon\hat{g}(\underline{s}', v')]$$

Unter Verwendung von (11) und weil $s$ 1-lipschitz ist folgt:

$$|\underline{s} - \underline{s}'| \leq \frac{\epsilon}{\delta}c[|\underline{s} - \underline{s}'| + |v - v'|] + \frac{1}{\delta}1[\lambda|v - v'| + \epsilon c\{|\underline{s} - \underline{s}'| + |v - v'|\}]$$

Hieraus ergibt sich

$$(1 - 2\frac{\epsilon}{\delta}c)|\underline{s} - \underline{s}'| \leq (\frac{\lambda}{\delta} + 2\frac{\epsilon}{\delta}c)|v - v'|$$

und folglich

$$|\underline{s}(v) - \underline{s}(v')| \leq \frac{\lambda + 2\epsilon c}{\delta - 2\epsilon c}|v - v'|$$

für alle $v, v' \in \mathsf{R}$. Weil $\frac{\lambda}{\delta} < 1$ ist, cf. (13), gilt $\frac{\lambda+2\epsilon c}{\delta-2\epsilon c} < 1$ für alle hinreichend kleinen $\epsilon$. Damit ist Behauptung (14) endlich nachgewiesen.

Wir können nun die Hadamard-Konnstruktion ausführen. Es sei $s_0 \in \mathcal{S}$ beliebig gewählt. Wir definieren Funktionen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ rekursiv mit Hilfe von (14): $s_1 = \underline{s}_0$, $s_2 = \underline{s}_1$, $s_3 = \underline{s}_2, \ldots$ Es ist zu zeigen, dass diese Folge von Funktionen konvergiert. Aufgrund von Gl. (15) gilt für $s = s_i$ und für $s = s_{i-1}$

$$\begin{aligned} s_{i+1}(v) &= -\frac{\epsilon}{\delta}\hat{f}(s_{i+1}(v), v) + \frac{1}{\delta}s_i(\lambda v + \epsilon\hat{g}(s_{i+1}(v), v)) \\ s_i(v) &= -\frac{\epsilon}{\delta}\hat{f}(s_i(v), v) + \frac{1}{\delta}s_{i-1}(\lambda v + \epsilon\hat{g}(s_i(v), v)) \end{aligned} \tag{16}$$

Daraus ergibt sich durch Subtraktion

$$\begin{aligned} s_{i+1}(v) - s_i(v) \;=\; & -\frac{\epsilon}{\delta}[\hat{f}(s_{i+1}(v), v) - \hat{f}(s_i(v), v)] \\ & +\frac{1}{\delta}[s_i(\lambda v + \epsilon\hat{g}(s_{i+1}(v), v)) - s_i(\lambda v + \epsilon\hat{g}(s_i(v), v))] \\ & +\frac{1}{\delta}[s_i(\lambda v + \epsilon\hat{g}(s_i(v), v)) - s_{i-1}(\lambda v + \epsilon\hat{g}(s_i(v), v))] \end{aligned} \tag{17}$$

Dabei wurde der Term $s_i(\lambda v+\epsilon\hat{g}(s_i(v),v))$ einmal subtrahiert und einmal addiert. Bevor wir die Differenz $s_{i+1}(v)-s_i(v)$ abschätzen, führen wir die Grösse

$$||s_i - s_{i-1}|| := \sup_{v\in\mathsf{R}} |s_i(v) - s_{i-1}(v)|$$

ein und bemerken, dass die letzte Klammer in (17) gerade durch diesen Ausdruck abgeschätzt werden kann. Somit folgt aus (17)

$$|s_{i+1}(v) - s_i(v)| \leq \frac{\epsilon}{\delta}c|s_{i+1}(v) - s_i(v)| + \frac{1}{\delta}1\epsilon c|s_{i+1}(v) - s_i(v)| + \frac{1}{\delta}||s_i - s_{i-1}||$$

und daher

$$|s_{i+1}(v) - s_i(v)| \leq \frac{1}{\delta - 2\epsilon c}||s_i - s_{i-1}||$$

Weil diese Abschätzung für alle $v \in \mathsf{R}$ gilt, folgt sogar

$$||s_{i+1} - s_i|| = \sup_{v\in\mathsf{R}} |s_{i+1}(v) - s_i(v)| \leq \chi||s_i - s_{i-1}|| \tag{18}$$

wobei $\chi = \frac{1}{\delta-2\epsilon c}$ gesetzt wurde. Man beachte, dass $\chi < 1$ gilt für alle hinreichend kleinen $\epsilon$, weil ja $\delta > 1$ ist. Wendet man die Abschätzung (18) sukzessive für $i = 1, 2, 3, \ldots$ an, folgt

$$||s_{i+1} - s_i|| \leq \chi^i||s_1 - s_0||$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
&|s_{m+r}(v) - s_m(v)| \\
&\quad = |s_{m+r}(v) - s_{m+r-1}(v) + s_{m+r-1}(v) - s_{m+r-2}(v) + \ldots + s_{m+1}(v) - s_m(v)| \\
&\quad \leq |s_{m+r}(v) - s_{m+r-1}(v)| + |s_{m+r-1}(v) - s_{m+r-2}(v)| + \ldots + |s_{m+1}(v) - s_m(v)| \\
&\quad \leq ||s_{m+r} - s_{m+r-1}|| + ||s_{m+r-1} - s_{m+r-2}|| + \ldots + ||s_{m+1} - s_m|| \\
&\quad \leq (\chi^{m+r-1} + \chi^{m+r-2} + \ldots + \chi^m)||s_1 - s_0|| \\
&\quad \leq \frac{\chi^m}{1-\chi}||s_1 - s_0||
\end{aligned}$$

Es gilt somit für alle $v \in \mathsf{R}$ und $m, r \in \mathsf{N}_0$

$$|s_{m+r}(v) - s_m(v)| \leq \chi^m d \quad \text{mit} \quad d = \frac{||s_1 - s_0||}{1-\chi} \tag{19}$$

Wegen $\chi < 1$ ist daher $s_i(v)$ für jedes $v$ eine Cauchy-Folge und daher konvergent. Wir setzen $s_\infty(v) := \lim_{i\to\infty} s_i(v)$. Aus (19) folgt durch den Grenzübergang $r \to \infty$

$$|s_\infty(v) - s_i(v)| \leq \chi^i d \tag{20}$$

Weil die Funktionen $s_i$ 1-lipschitz sind, folgt, dass auch $s_\infty$ 1-lipschitz ist, wie man durch den Grenzübergang $i \to \infty$ aus der Formel

$$|s_i(v) - s_i(v')| \leq |v - v'|$$

sieht.

Betrachten wir nun nochmals Gl. (16). Wir möchten den Grenzübergang $i \to \infty$ vollziehen. Die linke Seite ergibt $s_\infty(v)$. Für den ersten Term der rechten Seite erhalten wir $-\frac{\epsilon}{\delta}\hat{f}(s_\infty(v), v)$ weil $\hat{f}$ ja lipschitz und daher stetig ist. Aus der folgenden Formel, die man nachpruüfen möge,

$$|s_\infty(\lambda v + \epsilon\hat{g}(s_\infty(v), v)) - s_{i-1}(\lambda v + \epsilon\hat{g}(s_i(v), v))| \leq (\frac{1}{\chi} + \epsilon c)d\chi^i$$

folgt, dass der zweite Term der rechten Seite von (16) gegen $\frac{1}{\delta}s_\infty(\lambda v + \epsilon\hat{g}(s_\infty(v), v))$ strebt. Somit darf der gewünschte Grenzübergang in (16) durchgeführt werden, und das Resultat lautet

$$s_\infty(v) = -\frac{\epsilon}{\delta}\hat{f}(s_\infty(v), v) + \frac{1}{\delta}s_\infty(\lambda v + \epsilon\hat{g}(s_\infty(v), v))$$

bzw.

$$\delta s_\infty(v) + \epsilon\hat{f}(s_\infty(v), v) = s_\infty(\lambda v + \epsilon\hat{g}(s_\infty(v), v)).$$

Diese Gleichung bedeutet genau, dass der Graph von $s_\infty$ durch die Abbildung $P$ in sich abgebildet wird. Damit ist die Hadamard-Konstruktion durchgeführt.

Wir haben hier eine sogenannte globale Version des Satzes von Hadamard vorgeführt. Die lokale, die man zur Konstruktion der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Fixpunktes braucht, kann aus der globalen gewonnen werden. Dieser Übergang ist technischer Natur und wird deshalb nicht weiter betrachtet.

# Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze*

von

U. Kirchgraber

Departement Mathematik

ETH-Zürich

und

N. Sigrist

Kantonale Maturitätsschule für Erwachsene

Zürich

August 1995

**Zusammenfassung**

Das Feigenbaum-Diagramm kennt heute fast jeder. Und viele haben das Phänomen der Universalität mithilfe eines kleinen Computer-Programms auf ihrem PC selber experimentell verifiziert. Nur - was steckt wirklich dahinter?

Die Antwort ist: Ein schöner geometrischer Satz, der im Kern auf Poincaré zurückgeht! In diesem Artikel machen wir Sie, liebe Leserin, lieber Leser, mit diesen Ideen, die von M. Feigenbaum stammen, bekannt.

# 1 Periodenverdoppelung und Universalität

## 1.1 Eindimensionale diskrete dynamische Systeme

Betrachten wir die Rekursion

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2 =: F(x_n) \tag{1}$$

Wir untersuchen also die durch die Gleichung (1) definierten Zahlfolgen $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Eine solche Folge nennen wir eine *Bahn* des durch Gl. (1) definierten *diskreten dynamischen Systems*. Dabei ist eine Bahn durch ihren *Anfangs-* oder *Startpunkt* $x_0$ eindeutig bestimmt. Die Funktion $F$ nennen wir das *Bewegungsgesetz* des dynamischen Systems.

*Ausgearbeitete Fassung eines Vortrags des zweiten Autors, gehalten am 7. 11.1991 im Seminar über Mathematik und Unterricht der ETH-Zürich. Diese Arbeit entstand während eines Gastaufenthalts von N.S. an der ETH-Zürich im Rahmen des Programms "ETH für die Schule".

Allgemein werden auf diese Weise einfache, aber dennoch sehr interessante dynamische Systeme definiert. Die grundlegende Frage lautet: Wie verhalten sich ihre Bahnen?

Bezeichnet $F^n$ die $n$-te Iterierte von $F$, so können wir anstelle von Gl. (1) auch $x_n = F^n(x_0)$ schreiben. Im allgemeinen ist es nicht möglich eine explizite Formel für $F^n(x)$ anzugeben. Aus diesem Grund müssen sog. *geometrische* Methoden benützt werden, um die *qualitativen* Eigenschaften der Bahnen zu beschreiben.

Wir diskutieren zunächst einige einfache Bahntypen des Beispiels (1):

- Ist eine Folge $x_n$ konvergent, so ist ihr Grenzwert eine Lösung der Gleichung $x = F(x)$, d.h. ein Fixpunkt der Funktion $F$ (weil $F$ stetig ist). Die beiden Fixpunkte von $F(x) = 1 - x^2$ sind $x^* \approx 0.62$ und $x^* \approx -1.62$. Zum Startpunkt $x_0 = x^*$ gehört die Bahn $x_0 = x^* = x_1 = x_2 = \ldots$, d.h. es handelt sich um eine *Gleichgewichtslösung*, kurz um ein *Gleichgewicht.*

- Für $x_0 = 0$ ergibt sich $x_1 = F(0) = 1, x_2 = F(1) = 0, x_3 = 1, \ldots$. Diese Bahn ist *periodisch* mit Periode 2.

- Für $x_0 = 0.5$ findet man folgende Bahn: 0.5, 0.75, 0.4375, 0.808..., 0.346..., 0.88..., 0.22..., 0.94..., 0.098..., 0.99..., 0.019..., 0.999..., 0.0075..., ... . Es macht den Anschein, dass diese Bahn gegen die vorher gefundene 2-periodische Bahn 0, 1, 0, 1, ... strebt.

Die Funktion $F = 1 - x^2$ bildet das Intervall $I = [-1, 1]$ in sich ab, aber sie ist nicht invertierbar. Betrachten wir für einen Augenblick eine stetige Funktion $F$ die ein Intervall $I$ in sich abbildet und auf $I$ monoton ist. Sei $x_0, x_1, \ldots$, mit $x_0 \in I$, eine von $F$ erzeugte Bahn. Dann sind auf jeden Fall die Teilfolgen $x_0, x_2, x_4, \ldots$ und $x_1, x_3, x_5, \ldots$ monoton und daher konvergent. Hieraus folgt: Jede Bahn nähert sich einer Gleichgewichts- oder einer 2-periodischen Lösung. Damit ist das Verhalten des durch ein solches $F$ definierten Systems qualitativ erschöpfend beschrieben; es ist offenbar nicht sonderlich aufregend.

Wir betrachten deshalb von nun an nur noch nicht-monotone Funktionen $F$. Speziell beschäftigen wir uns mit der folgenden Klasse von Bewegungsgesetzen.

**Definition 1 (Grundmenge G)** *Ein Bewegungsgesetz $F$ gehört zur Menge* **G**, *wenn sie folgende Eigenschaften hat.*

1. *$F$ bildet das Intervall $I := [-1, 1]$ in sich ab und ist auf $I$ beliebig oft differenzierbar.*

2. *$F$ ist gerade, d. h. es gilt $F(-x) = F(x)$ für alle $x \in I$.*

3. *$F$ ist monoton wachsend für $x < 0$ und monoton fallend für $x > 0$.*

4. *$F$ erfüllt die Normierungsbedingung $F(0) = 1$.*

*Eine Funktion $F$, die den Bedingungen 1., 2. und 3. genügt heisst* symmetrisch-unimodal.

Wir diskutieren kurz die Normierungsbedingung 4. Sind für ein $F$ die Bedingungen 1. - 3. von Definition 1 erfüllt und ist $0 < F(0) =: \lambda < 1$, so führt die Streckung $x \longrightarrow \lambda^{-1}x$ die Funktion $F$ in die Funktion $G(x) = \lambda^{-1}F(\lambda x)$ über. Die Funktion G gehört offenbar zur Menge **G**. Die dynamischen Systeme $x_{n+1} = F(x_n)$ und $x_{n+1} = G(x_n)$ stimmen zudem bis auf eine Streckung überein und sind somit *äquivalent.* Daher kann man ohne Verlust an Allgemeinheit die Normierung $F(0) = 1$ fordern. Wir kommen später auf diesen Punkt zurück.

## 1.2 Das Phänomen der Universalität

Im folgenden betrachten wir ganze *Familien* von eindimensionalen Rekursionen. Das in der Literatur am meisten diskutierte Beispiel ist

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2 =: F_\mu(x_n) \tag{2}$$

Dabei ist $\mu$ der Parameter der Familie. Die Funktionen $F_\mu$ liegen für $0 < \mu \leq 2$ in der Grundmenge **G** von Definition 1.

(Häufig wird auch die Rekursion

$$y_{n+1} = ay_n(1 - y_n) \tag{3}$$

betrachtet. Für $2 < a \leq 4$ können die dynamischen Systeme (2) und (3) durch die Transformation $y = \frac{1}{4}(a-2)x + \frac{1}{2}$ ineinander übergeführt werden, wobei die Parameter durch die Beziehung $\mu = \frac{1}{4}a(a-2)$ miteinander verknüpft sind.)

Das folgende, häufig beschriebene Computerexperiment erlaubt es, einen vorläufigen Überblick über das Verhalten der Bahnen von Gl. (2) zu gewinnen. Man wählt einen Parameterwert $\mu$ und einen Startpunkt $x_0$. Man berechnet $x_n$ etwa für $n \in [1, 500]$ und zeichnet $x_n$ z. B. für $n \in [300, 500]$. Man hofft, dass das asymptotische Verhalten für $n \longrightarrow \infty$, das am meisten interessiert, unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes ist und bereits für $n \in [300, 500]$ in Erscheinung tritt. Stellt man die Resultate im $\mu - x-$Koordinatensystem dar, bekommt man das wohlbekannte Bifurkationsdiagramm.

Dieses Experiment ermöglicht es interessante Beobachtungen zu machen, auf die wir im folgenden teilweise genauer eingehen werden:

*Es gibt eine Folge von Parameterwerten*

$$\mu_1 \approx 0.74, \quad \mu_2 \approx 1.25 < \mu_3 < \mu_4 < \ldots$$

*mit folgenden Eigenschaften*

1. *Für jedes $\mu \in (\mu_i, \mu_{i+1}), i \geq 1$, besitzt das diskrete dynamische System (2) eine periodische Bahn der Periode $2^i$ (die überdies attraktiv ist, d.h. sie zieht benachbarte Bahnen an). Weil die Periode im Intervall $(\mu_i, \mu_{i+1})$ doppelt so gross ist, wie im Vorgängerintervall $(\mu_{i-1}, \mu_i)$ sagt man, die Familie $F_\mu = 1 - \mu x^2$ durchlaufe eine* Periodenverdoppelungs-Sequenz.

2. *In jedem Intervall $(\mu_i, \mu_{i+1})$ gibt es einen Wert $\mu_i^*$ mit folgender Eigenschaft: Für $\mu = \mu_i^*$ läuft die in 1. genannte periodische Bahn durch den Punkt $x = 0$, oder anders ausgedrückt: der Startpunkt $x_0 = 0$ erzeugt eine periodische Bahn der Periode $2^i$. 0 heisst $2^i-$periodischer Punkt.*

3. *Die Folge $\mu_i$ (und mit ihr die Folge $\mu_i^*$) konvergiert für $i \to \infty$ gegen $\mu_\infty \approx$* 1.40.

(Für $\mu > \mu_\infty$ ist das Verhalten des dynamischen Systems (2) ebenfalls interessant, da es teilweise "chaotisch" ist, wir gehen jedoch darauf nicht näher ein.)

Das Verhalten der Folge $\mu_i^*$, genauer gesagt ihre Konvergenzgeschwindigkeit, ist das Thema der weiteren Ausführungen. Zur Vereinfachung der Notation werden wir von nun an $\mu_i$ statt $\mu_i^*$ schreiben. Wir verwenden also die folgende Definition.

**Definition 2** *$\mu_i$ ist derjenige Wert von $\mu$, für den 0 eine $2^i$–peridische Bahn des diskreten dynamischen Systems $x_{n+1} = F_\mu(x_n)$ erzeugt, i. e. es gilt $F_{\mu_i}^{2^i}(0) = 0$, aber $F_{\mu_i}^k(0) \neq 0$ für alle $k < 2^i$.*

Zur Einführung des Phänomens, das man *Universalität* nennt, berechnen wir einige $\mu_i$ numerisch, und zwar für verschiedene Familien von Bewegungsgesetzen. Wir beginnen mit der Standardfamilie $F_\mu(x) = 1 - \mu x^2$. Gemäss Definition 2 geht es darum für $i = 1, 2, 3, \ldots$ die Parameterstellen $\mu_i$ zu finden, für die $F_\mu^{2^i}(0) = 0$ gilt. Für $i = 1$ liefert die Bedingung

$$F_\mu^{2^i}(0) = F_\mu^2(0) = F_\mu(1) = 1 - \mu = 0$$

den Wert $\mu_1 = 1$. Für $i = 2$ findet man

$$F_\mu^{2^2}(0) = F_\mu^4(0) = 1 - \mu(1 - \mu(1 - \mu)^2)^2 = (1 - \mu)(1 + 2\mu^2(1 - \mu) - \mu^3(1 - \mu)^3) = 0$$

Es ist $F_1^2(0) = 0$ und deshalb $F_1^4(0) = 0$, wie der Faktor $1 - \mu$ deutlich macht. Die verbleibende Gleichung

$$1 + 2\mu^2(1 - \mu) - \mu^3(1 - \mu)^3 = 0$$

löst man z. B. mit dem Newton-Verfahren. Man erhält $\mu_2 \approx 1.310702641$.

Für $i \geq 3$ muss man die $\mu_i$ erst recht numerisch berechnen. Will man z. B. $\mu_6$ bestimmen, so hat man die Gleichung $F_\mu^{2^6}(0) = 0$ nach $\mu$ zu auflösen. Dabei ist zu beachten, dass diese Gleichung bereits an den Stellen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_5$ erfüllt ist. Wir schlagen folgendes Vorgehen vor. Wir beginnen etwa mit $\mu = 0.9$, erhöhen $\mu$ in Schritten $\Delta\mu$, z. B. $\Delta\mu = 0.03$ und berechnen für jedes $\mu$ die Zahl $x(\mu) := F_\mu^2(0)$, bis erstmals $x(\mu)$ und $x(\mu + \Delta\mu)$ verschiedene Vorzeichen haben. Weil $x(\mu)$ stetig von $\mu$ abhängt, haben wir damit zwei Parameterwerte gefunden, zwischen denen $\mu_1$ liegt. Nun wird $\mu_1$ mit dem Bisektionsverfahren mit der gewünschten Genauigkeit berechnet. Dann fährt man mit $\mu = \mu_1$ und einem z. B. um den Faktor 5 verkleinerten $\Delta\mu$ und mit $x(\mu) := F_\mu^{2^2}(0)$ fort, usw.

Die Resultate für die Standardfamilie $F_\mu = 1 - \mu x^2$ sind in Tabelle 1 enthalten. Überdies ist der Wert von

$$\delta_i := \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i}$$

für $i = 2, 3, \ldots, 11$ angegeben. Tabelle 1 lässt vermuten, dass nicht nur die Folge $\mu_i$ gegen einen gewissen Grenzwert $\mu_\infty$ konvergiert, sondern auch die Folge $\delta_i$. Bezeichnen wir deren Grenzwert mit $\delta$, so gilt $\delta \approx 4.66920$. Die $\delta_i$, und somit auch $\delta$,

| $i$ | $\mu_i$ | $\delta_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.0 | |
| 2 | 1.310702641336833 | 4.39 |
| 3 | 1.381547484432061 | 4.60095 |
| 4 | 1.396945359704561 | 4.65514 |
| 5 | 1.400253081214783 | 4.666108 |
| 6 | 1.400961962944841 | 4.6685505 |
| 7 | 1.401113804939776 | 4.6690605 |
| 8 | 1.401146325826946 | 4.6691715 |
| 9 | 1.401153290849924 | 4.6691951 |
| 10 | 1.401154782546618 | 4.669200231 |
| 11 | 1.401155102022464 | 4.669201331 |
| 12 | 1.401155170444411 | |

Tabelle 1: Standardfamilie $F_\mu(x) = 1 - \mu x^2$

sind ein Mass für die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\mu_i$. Der experimentelle Befund ist daher: *Die Folge $\mu_i$ konvergiert mit Geschwindigkeit $\delta \approx 4.66920$.*

Untersuchen wir einige weitere Beispiele! Betrachten wir zunächst die folgende Schar von Bewegungsgesetzen:

$$F_\mu(x) = 1 - \mu x^2 + ax^4$$

Für $a = 0$ erhalten wir wieder die Standardfamilie (2). Wählen wir einige weitere Werte für $a$. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Der Wert von $\mu_\infty$ hängt ganz offenbar von der gewählten Familie $F_\mu$ ab. *Hingegen ist $\delta_9$ überraschenderweise mit grosser Genauigkeit unabhrigig von der Wahl von $F_\mu$.* Dieses Phänomen nennt man *Universalität.*

Einige weitere Beispiele untermauern diese Beobachtung, cf. Tabellen 3, 4.

Betrachtet man hingegen die Familie

$$F_\mu = 1 - \mu x^4$$

so tritt zwar ebenfalls eine Periodenverdoppelungs-Sequenz auf, und die $\delta_i$ konvergieren, aber der Grenzwert ist nicht 4.669... sondern etwa 7.28. Der Unterschied zwischen dem letzten und allen früheren Beispielen liegt offenbar im Charakter des Maximums, das bei $x = 0$ vorliegt. Die bisherigen Überlegungen geben Anlass zu folgender

**Vermutung 1 (Universalität)** *Durchläuft eine Familie von Funktionen $F_\mu$ der Klasse* **G** *mit quadratischem Maximum (d .h. $\frac{d^2F_\mu}{dx^2}(0) \neq 0$) eine Periodenverdoppelungs-Sequenz, so ist die Geschwindigkeit $\delta_i$, mit der die Folge der entsprechenden Parameterstellen $\mu_i$ konvergiert* unabhängig *von der betreffenden Familie.*

| | $a = 0.05$ | $a = 0.1$ | $a = 0.2$ | $a = -0.1$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mu_1 =$ | 1.05 | 1.1 | 1.2 | 0.9 |
| $\mu_2 =$ | 1.360162 | 1.409951 | 1.510427 | 1.212854 |
| $\mu_3 =$ | 1.430435 | 1.479571 | 1.578517 | 1.284593 |
| $\mu_4 =$ | 1.445692 | 1.494669 | 1.593243 | 1.300214 |
| $\mu_8 =$ | 1.4498535495 | 1.4987862602 | 1.5972575155 | 1.3044773207 |
| $\mu_9 =$ | 1.4498604495 | 1.4987930866 | 1.5972641707 | 1.3044843894 |
| $\mu_{10} =$ | 1.4498619272 | 1.4987945486 | 1.5972655961 | 1.3044859032 |
| $\mu_\infty \approx$ | 1.449862 | 1.498795 | 1.597266 | 1.304486 |
| $\delta_9 =$ | 4.669195498 | 4.669195846 | 4.669196602 | 4.669194497 |

Tabelle 2: Familie $F_\mu(x) = 1 - \mu x^2 + ax^4$

| | $a = 0.0, b = 0.1$ | $a = b = 0.1$ | $a = b = -0.1$ |
|---|---|---|---|
| $\mu_1 =$ | 1.10 | 1.20 | 0.8 |
| $\mu_\infty \approx \mu_{10} =$ | 1.4987945486 | 1.6031476503 | 1.2029081478 |
| $\delta_9 =$ | 4.66919585 | 4.66919873 | 4.66919227 |

Tabelle 3: Familie $F_\mu(x) = 1 - \mu x^2 + ax^4 + bx^6$

| $F_\mu =$ | $1 - \mu(1 - \cos(\frac{\pi}{2}x))$ | $\cos(\mu\frac{\pi}{2}x)$ | $2\exp(-\mu x^2) - 1$ |
|---|---|---|---|
| $\mu_1 =$ | 1.0 | 1.0 | $\ln 2 \approx 0.693$ |
| $\mu_\infty \approx \mu_{10} =$ | 1.394698858 | 1.256773190 | 1.177300210 |
| $\delta_9 =$ | 4.66919971 | 4.66920424 | 4.66919500 |

Tabelle 4: Verschiedene Familien

Das Phänomen der Universalität hat eine gewisse erkenntnistheoretische Bedeutung. Die Frage, wie gut ein mathematisches Modell eine reale Situation beschreibt, stellt sich in der Angewandten Mathematik ständig. Oft betrachtet man deshalb nicht nur ein Modell, sondern auch alle benachbarten. Man ist dann bereits glücklich, falls diese Modelle das gleiche *qualitative* Verhalten zeigen. Dass eine grosse Klasse von Modellen sogar *quantitative* Gemeinsamkeiten hat, erscheint ganz unwahrscheinlich. Aber genau dieser Fall tritt im Zusammenhang mit dem Phänomen der Universalität auf.

Periodenverdoppelungs-Sequenzen und die Eigenschaft der Universalität sind übrigens nicht nur bei eindimensionalen diskreten dynamischen Systemen, sondern z. B. auch bei ebenen diskreten Systemen, die durch flächentreue Abbildungen erzeugt werden, s. [4], und bei gewöhnlichen Differentialgleichungen beobachtet worden. Das Phänomen ist auch in realen Situationen nachgewiesen worden. W. Szczygielski [8] hat Anstreifvorgänge eines schnell um seine Achse rotierendes Pendels, das mit einer Wand in Kontakt treten kann, untersucht und universelles Verhalten gefunden.

Die universellen Aspekte von Periodenverdoppelungs-Sequenzen wurden um 1975 von Mitchell J. Feigenbaum [5] entdeckt. Überdies hat Feigenbaum den Mechanismus gefunden, der hinter diesem Phänomen steckt: Es zeigt sich, dass ein sog. *hyperbolischer Fixpunkt* eines gewissen nichtlinearen Operators für die Universalität verantwortlich ist. Die tatsächliche Ausgestaltung von Feigenbaums Ideen zu einem rigorosen mathematischen Beweis ist nicht trivial, s. [1, 7, 4, 3]. Darauf wird in diesem Artikel nicht eingegangen. Hingegen werden wir im nächsten Abschnitt Feigenbaums Hypothesen vorstellen. Sie gestatten es, das Phänomen der Universalität im Prinzip zu verstehen. Anstelle der schwierigen Verifikation der Feigenbaum-Hypothesen wird im übernächsten Abschnitt mithilfe von gewissen Näherungen gezeigt, dass es jedenfalls plausibel ist, dass sie richtig sind.

Wir möchten mit diesem Beispiel zeigen, wie weit der Weg von einem per Computer entdeckten Phänomen bis zu einer befriedigenden Erklärung i. a. ist. Wir halten das in einer Zeit, in der Computerexperimente einen immer grösseren Stellenwert haben, für einen Punkt, der verdient, hervorgehoben zu werden.

# 2 Die Feigenbaum-Hypothesen

Um das Phänomen der Universaltät bei Periodenverdoppelungs-Sequenzen erklären zu können, muss man das *geometrische Problem* verstehen, das sich dahinter verbirgt.

## 2.1 Der Verdoppelungsoperator $\tau$

Abb. 1 zeigt Resultate der in Abschnitt 1.2 beschriebenen Berechnungen, wie sie auszugsweise in den Tabellen 1, 2 zusammengefasst sind. Jeder Punkt im $a_1 - a_2$–Koordinatensystem stellt genau eine Funktion des Typs

$$F(x) = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4$$

dar. Die Menge aller dieser biquadratischen Funktionen, die überdies in der Grundmenge $\mathbf{G}$, cf. Definition 1, liegen, nennen wir $\mathbf{G_2}$.[1]

Man sieht in Abb. 1, dass die Punkte $(a_1, a_2)$, für welche $x = 0$ ein $2^i$–periodischer Punkt ist[2], gut organisiert sind. Dies gibt Anlass zur folgenden wichtigen Definition.

**Definition 3 (Die Mengen $\Sigma_i$)** *Für $i = 1, 2, 3, \ldots$ ist $\Sigma_i$ die Menge aller Funktionen $F$ aus $\mathbf{G}$, für welche 0 ein $2^i$–periodischer Punkt von $F$ ist.*

Die Funktionen aus $\mathbf{G_2} \cap \Sigma_i$ erfüllen die Bedingung

$$F^2(0) = F(1) = 1 + a_1 + a_2 = 0,$$

d. h. sie werden durch eine Gerade in der $a_1 - a_2$–Ebene dargestellt. Allgemeiner gilt: Die Linien in Abb. 1 gehören zu $\mathbf{G_2} \cap \Sigma_i$, wir bezeichnen sie mit $\Sigma_{i,2}$. Die Funktionen $F(x) = 1 - \mu_i x^2$ sind für $i = 1, 2, 3, \ldots$ Elemente von $\Sigma_{i,2}$.

Nach diesen Vorbemerkungen ergeben sich erste Anhaltspunkte für den gesuchten geometrischen Zugang. Die Menge $\Sigma_i$ ist eine Fläche der Co-Dimension 1 in $\mathbf{G}$, da sie durch die *eine* Bedingung $F^{2^i}(0) = 0$ definiert ist. Eine 1-parametrige Familie $F_\mu$ von Funktionen aus $\mathbf{G}$ mit einer Periodenverdoppelungs-Sequenz ist eine Kurve in $\mathbf{G}$, welche die Flächen $\Sigma_i$ schneidet. (Vergl. in Abb. 1 die Geraden $a_2$ =konstant.)

Es war der grundlegende Gedanke von Feigenbaum, einen Operator $\tau$ einzuführen, der jeder Funktion $F$ (aus einer geeigneten Teilmenge von $\mathbf{G}$) eine Bildfunktion $\tau F$ zuordnet, und zwar so, dass dabei die Flächen $\Sigma_i$ ineinander abgebildet werden.

Wie soll man diesen Operator $\tau$ definieren? Sei $F$ eine Funktion aus $\Sigma_i$, d. h. es gilt $F^{2^i}(0) = 0$. Daraus folgt $(F^2)^{2^{i-1}}(0) = 0$, d. h, 0 ist ein $2^{i-1}$–periodischer Punkt der Funktion $F^2$. Das scheint die Zuordnung $F \to F^2$ nahezulegen.

Betrachten wir ein Beispiel, s. Abb. 2. Der Teil a) dieser Figur zeigt das Bild von

$$F(x) = 1 - \mu_3 x^2 \approx 1 - 1.3815x^2.$$

Man sieht, 0 ist $2^3$–periodischer Punkt (wie es sein soll, s. Tabelle 1). Die Funktion liegt somit in $\Sigma_3$. Teil b) von Abb. 2 zeigt das Bild von $F^2$. Man sieht, 0 ist $2^2$–periodischer Punkt von $F^2$ (wie erwartet).

Es geht immer noch um die Frage, wie man den Operator $\tau$ definieren soll. Die Bildfunktion $\tau F$ soll in der Grundmenge $\mathbf{G}$ liegen. Betrachten wir die Funktion $F^2$ in Teil b) von Abb. 2. Sie erfüllt die ersten beiden Bedingungen von Definition 1, aber nicht die beiden übrigen. Um dies zu beheben definieren wir

$$-a := F^2(0) = F(1),$$

beschränken uns in Teil b) von Abb. 2 auf das Intervall $-a \leq x \leq a$ und unterwerfen das Rechteck $\{(x, y) | -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq b\}$ der Streckspiegelung

$$x \longrightarrow a^{-1}x, \qquad y \longrightarrow -a^{-1}y.$$

[1] Eine Funktion $F(x) = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4$ liegt in $\mathbf{G_2}$ falls $a_1 < 0, F(1) = 1 + a_1 + a_2 \geq -1$, und $F'(1) = 2a_1 + 4a_2 \leq 0$, d. h. falls $a_1 < 0, a_2 \geq -a_1 - 2$ und $a_2 \leq -\frac{1}{2}a_1$ gilt. Somit ist $\mathbf{G_2}$ in der $a_1 - a_2$–Ebene ein dreieckiges Gebiet mit den Ecken $(0, 0), (0, -2)$ und $(-4, 2)$.

[2] Sie sind in Abbildung 1 durch kleine Kreise markiert.

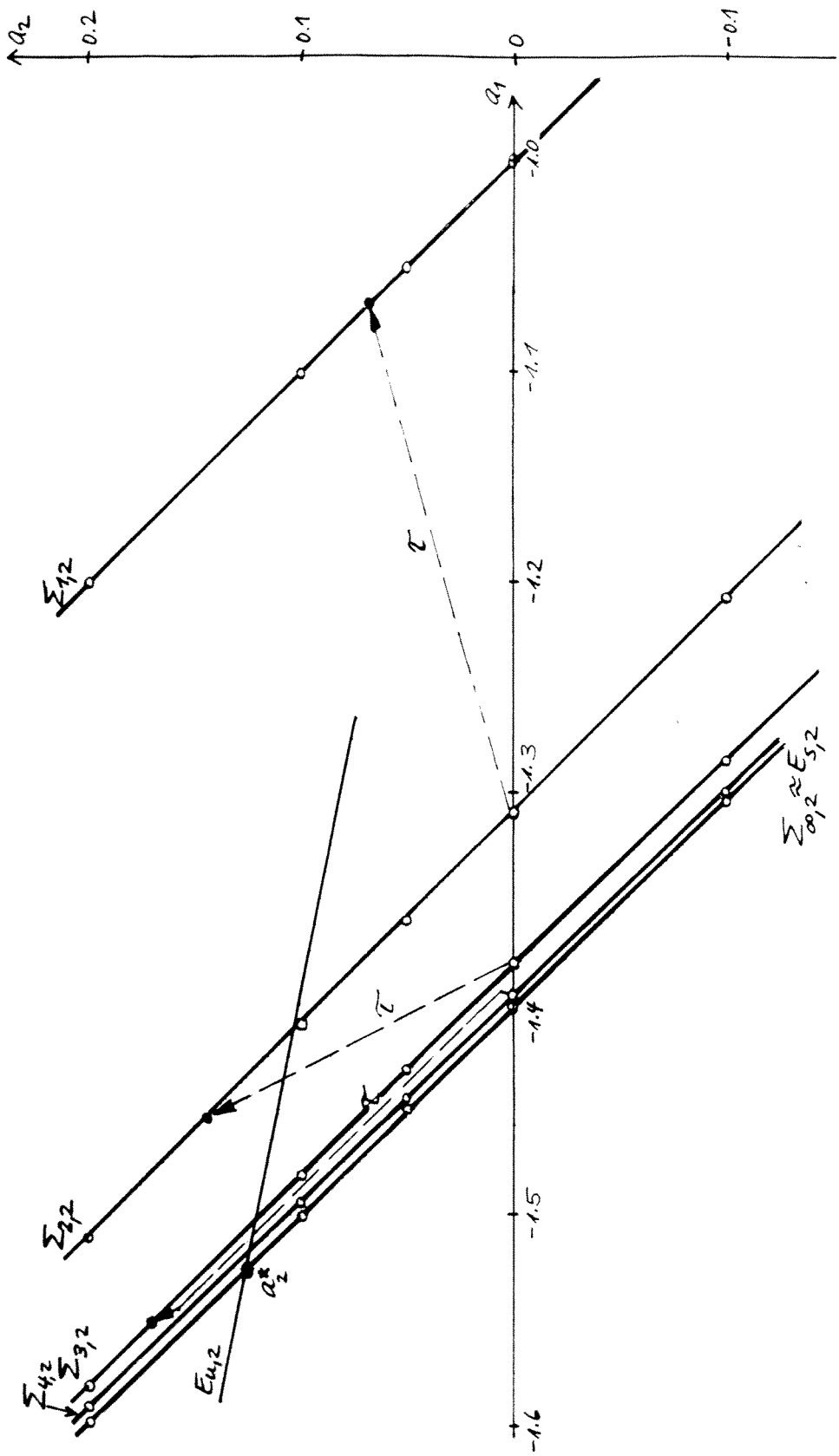



Abbildung 1: Die $a_1 - a_2$–Ebene

| | |
|---|---|
| $\mu = \mu_2$ | $\tau F(x) = 1 - 1.0675x^2 + 0.0675x^4$ |
| $\mu = \mu_3$ | $\tau F(x) = 1 - 1.4565x^2 + 0.1465x^4$ |
| $\mu = \mu_4$ | $\tau F(x) = 1 - 1.5492x^2 + 0.1705x^4$ |
| $\mu = \mu_\infty$ | $\tau F(x) = 1 - 1.57x^2 + 0.07x^4$ |

Tabelle 5: $\tau F$ für $F(x) = 1 - \mu x^2$ und $\mu = \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_\infty$

Das Kurvenstück $y = F^2(x) = F(F(x)), -a \leq x \leq a$, geht über in die Kurve

$$y = -a^{-1}F(F(ax)), \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Das ist die Kurve von Teil c) in Abb. 2. Es macht den Anschein, dass nun auch die beiden weiteren Bedingungen der Definition 1 erfüllt sind. Damit ist die Definition des Operators $\tau$ vorbereitet.

**Definition 4 (Der Verdopplungsoperator $\tau$)** *Sei $F \in \mathbf{G}$, und es gelte*

$$a := -F(1) > 0. \tag{4}$$

*Dann setzen wir*

$$(\tau F)(x) = -a^{-1}F(F(ax)) \tag{5}$$

Betrachten wir ein Beispiel. Es sei, wieder einmal, $F(x) = 1 - \mu x^2$. Dann ist $a = -F(1) = \mu - 1$ und

$$(\tau F)(x) = -a^{-1}F^2(ax) = -a^{-1}(1 - \mu[1 - \mu(ax)^2]^2) = 1 - 2\mu^2 ax^2 + \mu^3 a^3 x^4$$

In Tabelle 5 ist $\tau F$ für verschiedene Werte von $\mu$, vergl. Tabelle 1, angegeben. In Abb. 1 sind die ersten drei Beispiele aus Tabelle 5 eingezeichnet und die Wirkungsweise des Operators $\tau$ durch gestrichelte Pfeile markiert.

Es folgen einige Bemerkungen über Eigenschaften des Operators $\tau$.

a) Für $F \in \Sigma_1$ ist $a = 0$ und damit $\tau$ nicht definiert. Hingegen ist die Voraussetzung (4) erfüllt für alle $F \in \Sigma_i$ für $i \geq 2$. Ist nämlich $F(1) > 0$, so ist $F(x) > 0$ für $x \in [-1, 1]$ und $x = 0$ kann nicht eine periodische Bahn erzeugen.

b) Es ist nicht für jede Funktion $F$ aus der Grundmenge $\mathbf{G}$ auch $\tau F$ in $\mathbf{G}$. Man muss den Definitionsbereich von $\tau$ geeignet einschränken, vergl. [7], p. 245. Für $F_\mu(x) = 1 - \mu x^2$ liegt $\tau F_\mu$ für $\mu \in (1, 1.54)$ in $\mathbf{G}$.

c) *$\tau$ bildet für $i \geq 2$ die Menge $\Sigma_i$ in die Menge $\Sigma_{i-1}$ ab.*

Zum Beweis schreiben wir $\tau F$ als Verkettung $\tau F = \sigma^{-1} \circ F^2 \circ \sigma$ mit[3] $\sigma(x) = -ax$. Dann gilt

$$(\tau F)^2 = \sigma^{-1} \circ F^2 \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ F^2 \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ F^4 \circ \sigma$$

und offensichtlich gilt allgemein $(\tau F)^n = \sigma^{-1} \circ (F^2)^n \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ (F^{2n}) \circ \sigma$, also[4]

$$(\tau F)^n(x) = -a^{-1}(F^{2n})(ax). \tag{6}$$

[3]Man beachte, dass $F(ax) = F(\sigma(x))$ gilt, weil $F$ eine gerade Funktion ist.

[4]Man beachte, dass i. a. $(\tau F)^n$ verschieden von $\tau^n(F)$ ist.

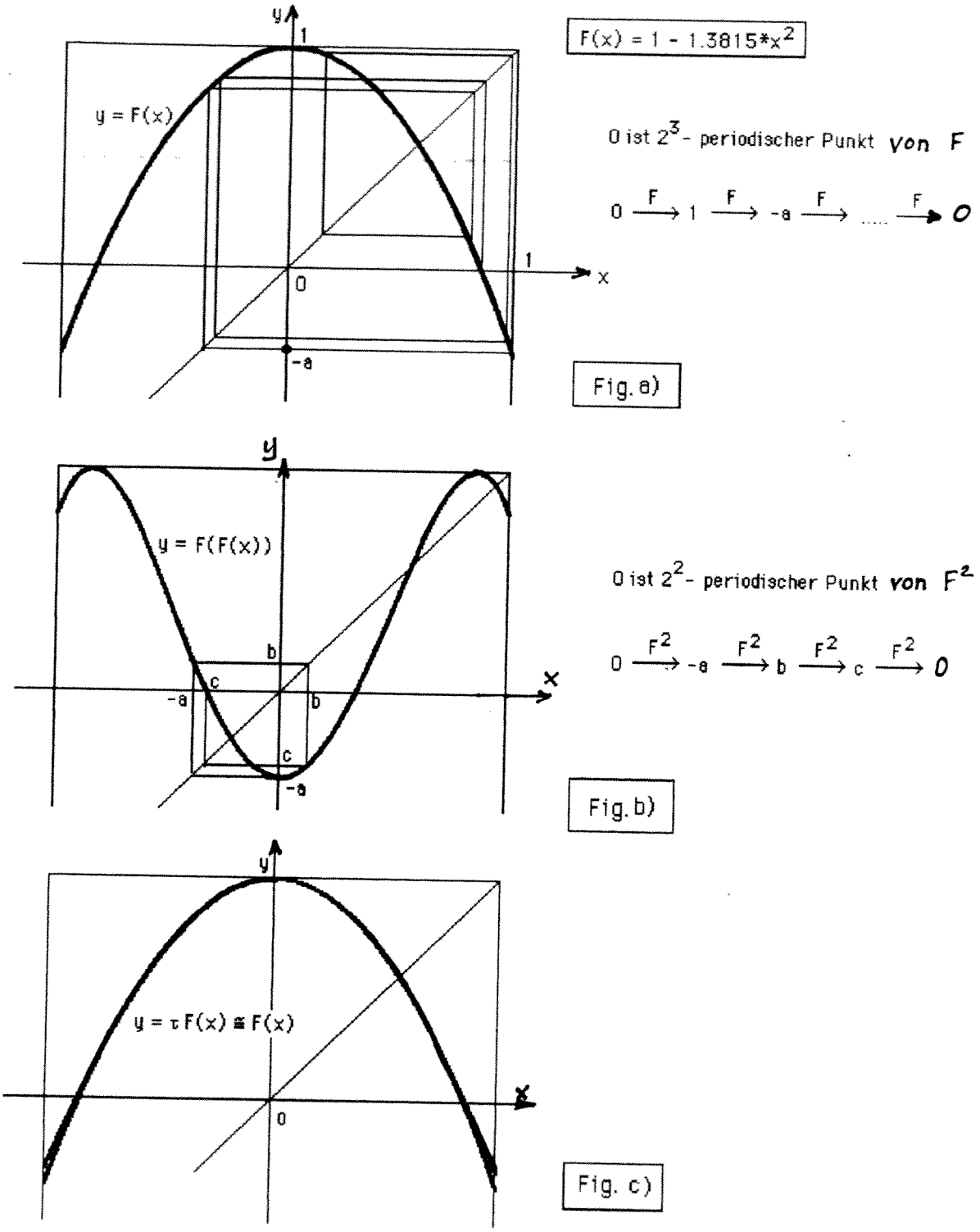



Abbildung 2: $F, F^2, \tau F$

Für $F \in \Sigma_i$ gilt $F^{2^i}(0) = 0$ und $F^j(0) \neq 0$ für $1 \leq j < 2^i$. Aus der ersten Gleichung und (6) folgt

$$(\tau F)^{2^{i-1}}(0) = -a^{-1}(F^{2^i})(0) = 0.$$

Wäre $(\tau F)^k(0) = 0$ für ein $k$ mit $1 \leq k < 2^{i-1}$, so wäre, wegen Gl. (6), auch $F^{2k}(0) = 0$, mit $2k < 2^i$, im Widerspruch zur Voraussetzung über $F$. Somit ist 0 ein $2^{i-1}$–periodischer Punkt von $\tau F$ und deshalb $\tau F \in \Sigma_{i-1}$.

d) Zeichnet man für $F(x) = 1 - \mu_3 x^2$ zum Graphen von $(\tau F)(x)$ auch noch denjenigen von $F(x)$ ein, wie in Teil c) von Abb. 2 gemacht, so zeigt es sich, dass die beiden Kurven fast zusammenfallen. Offenbar ist also

$$\tau F(x) \approx F(x) \quad \text{für} \quad x \in [-1, 1].$$

Man erkennt im Nachhinein nochmals den Zweck der Normierung $F(0) = 1$ und der Renormierung $\tau F(0) = 1$: Ähnliche Kurvenstücke werden auf gleiche Grösse gebracht, damit man sie miteinander vergleichen kann. Man kann sich nun fragen, ob es eine Funktion $F$ gibt, welche die Bedingung

$$\tau F(x) = F(x) \quad \text{für} \quad x \in [-1, 1]$$

*exakt* erfüllt. Eine solche Funktion wäre ein Fixpunkt des Operators $\tau$. Darum geht es u. a. bei den Feigenbaumhypothesen.

## 2.2 Aus den Feigenbaum-Hypothesen folgt Universalität

Die folgenden von Feigenbaum aufgestellten Hypothesen, vergl. [5], haben ihn berühmt gemacht.

**Feigenbaum-Hypothese 1** *Der Verdoppelungsoperator $\tau$ hat einen Fixpunkt, die sog.* universelle *Funktion $g(x)$. Diese liegt in* **G**.

**Feigenbaum-Hypothese 2** *Für die Linearisierung $D\tau_g$ von $\tau$ im Fixpunkt $g$ gilt: $D\tau_g$ hat genau einen Eigenwert $\delta$, der grösser als* 1 *ist. Dieser Eigenwert ist einfach und es gilt*

$$\delta \approx 4.669.$$

*Alle übrigen Eigenwerte sind dem Betrage nach kleiner als* 1.[5]

Die Hypothese 2 lässt vermuten, dass die in Abschnitt 1.2 experimentell entdeckte universelle Konstante (für die Konvergenzgeschwindigkeit der Parameterwerte bei Periodenverdoppelungs-Sequenzen) gerade gleich dem Eigenwert $\delta$ ist. Im folgenden geht es darum, diese Vermutung zu begründen, und damit das Phänomen der Universalität zu erklären.

Die Feigenbaum-Hypothesen 1, 2 ermöglichen den angekündigten geometrischen Zugang zum Problem der Universalität. Die Situation ist in Abb. 3 schematisch dargestellt. $g$ ist der Fixpunkt von $\tau$, und $E_u$ der 1–dimensionale Eigenraum von

[5] Ein Fixpunkt mit dieser Eigenwertstruktur (d. h. mit Eigenwerten die betragsmässig grösser als 1, und solchen, die betragsmässig kleiner als 1 sind) heisst *hyperbolisch*.

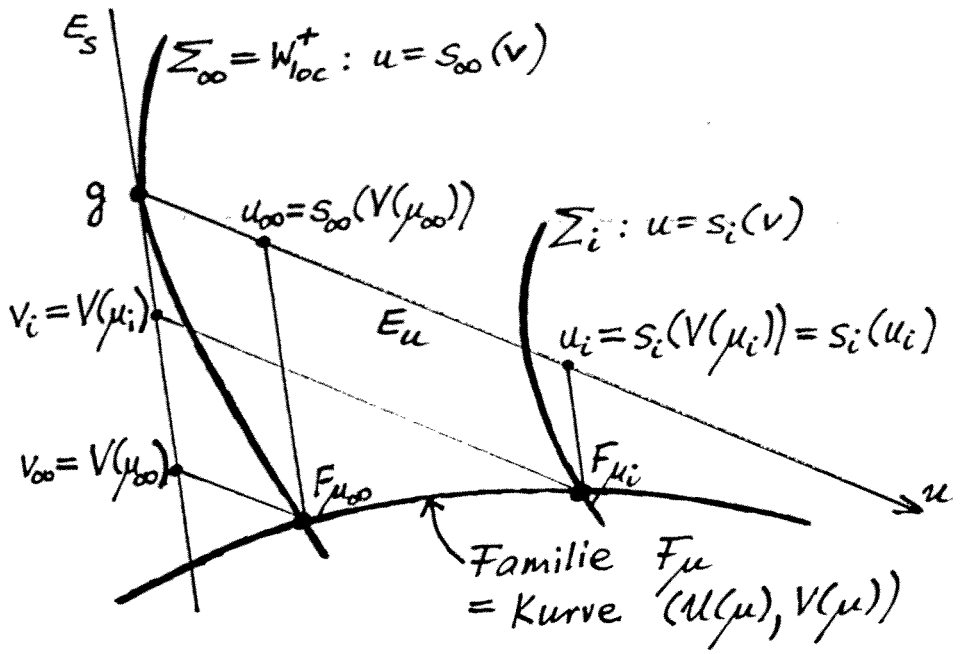



Abbildung 3: Die Geometrie der Universalität

$D\tau_g$ zum Eigenwert $\delta$, die sog. unstabile Richtung (weil $D\tau_g$ auf $E_u$ expandierend ist). Weiter ist $E_s$ der lineare Raum zu den übrigen Eigenwerten von $D\tau_g$ (deren Beträge alle kleiner als 1 sind). $E_s$ hat Codimension 1; weil $D\tau_g$ auf $E_s$ kontrahierend ist, heisst $E_s$ stabiler Eigenraum. Die Gerade $E_u$ machen wir zur $u-$Koordinatenachse mit Nullpunkt in $g$. Die Ortsvektoren im (unendlich-dimensionalen) stabilen Raum $E_s$ mit $g$ als Nullpunkt bezeichnen wir mit $v$. Jedes Element $F$ aus $\mathbf{G}$ wird dementsprechend durch ein Paar $(u, v)$ dargestellt.

Weiter ist in Abb. 3 eine der Flächen $\Sigma_i$ angedeutet. Wir stellen uns vor, dass sie eine Darstellung der Form

$$u = s_i(v)$$

besitzt.

Wir zerlegen die folgenden Überlegungen in drei Schritte.

a) $g$ ist ein *hyperbolischer* Fixpunkt des Operators $\tau$. Hyperbolische Fixpunkte spielen eine wichtige Rolle und sind gut untersucht. Eine Einführung zu diesem Thema findet man in [6], im Zwillings-Artikel zu den Ausführungen hier. Die folgenden Darlegungen stützen sich auf [6].

Ein hyperbolischer Fixpunkt einer Abbildung besitzt eine (lokale) stabile Mannigfaltigkeit $W^+_{loc}$ (und ebenso eine (lokale) instabile Mannigfaltigkeit $W^-_{loc}$). Nach Hadamard, s. [6], kann $W^+_{loc}$ wie folgt konstruiert werden. Man beginnt mit einer Fläche, die bezüglich des stabilen Eigenraums hinreichend flach ist und betrachtet deren Urbild bezüglich der gegebenen Abbildung, und davon wieder das Urbild usw. Auf diese Weise entsteht eine Folge von Flächen. Diese konvergieren gegen die stabile Mannigfaltigkeit $W^+_{loc}$.

Die Pointe ist nun, dass wir zum Fixpunkt $g$ und der Abbildung $\tau$ ja eine solche Folge von Flächen schon haben: Nämlich die $\Sigma_i$ aus Definition 3, s. Bemerkung c), in

Abschnitt 2.1. Daraus schliessen wir, dass die Flächen $\Sigma_i$ gegen die stabile Mannigfaltigkeit $W^+_{loc} = \Sigma_\infty$ von $g$ konvergieren. So wie die $\Sigma_i$ als Graphen von Funktionen $s_i$ dargestellt werden, beschreiben wir $\Sigma_\infty$ durch

$$u = s_\infty(v).$$

b) Weil die instabile Richtung $E_u$ des Fixpunktes $g$ von $\tau$ eindimensional ist, s. Hypothese 1, lässt sich die Konvergenzgeschwindigkeit mit der die Funktionen $s_i$ gegen die Funktion $s_\infty$ streben, gut beschreiben. Es gilt, s. [6], Abschnitte g), i), das folgende Resultat.

**Lemma 1 (Konvergenzgeschwindigkeit der Flächen $\Sigma_i$ )** *Die Folge*

$$\sigma_i(v) := \delta^i[(s_\infty(v) - s_i(v)]$$

*konvergiert für $i \to \infty$ (gleichmässig) gegen eine (stetige) Grenzfunktion $\sigma_\infty(v)$. Dabei bezeichnet $\delta > 1$ den Eigenwert von $D\tau_g$ in Richtung $E_u$ .*

c) Sei jetzt $F_\mu$ eine einparametrige Familie von Bewegungsgesetzen mit einer Periodenverdoppelungs-Sequenz. In Abb. 3 ist dies eine Kurve, welche die Fläche $\Sigma_i$ für den Parameterwert $\mu = \mu_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$ durchstösst.

**Satz 1 (Universalität)** *Die Differenzen-Quotienten-Folge*

$$\delta_i := \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i}$$

*konvergiert für $i \to \infty$ gegen den Eigenwert $\delta$ von $D\tau_g$, d. h. der Grenzwert ist* unabhängig *von der gewählten Familie $F_\mu$.*

Zum Beweis beschreiben wir die Familie $F_\mu$ durch die Parameterdarstellung

$$u = U(\mu), \quad v = V(\mu) \tag{7}$$

Weiter setzen wir

$$u_i = U(\mu_i), \quad v_i = V(\mu_i) \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \tag{8}$$

Wir nehmen an, die Funktion $\mu \to u = U(\mu)$ sei umkehrbar und bezeichnen die Umkehrfunktion mit $\mu = M(u)$. Für die $u_i, v_i$ gilt wegen Gl. (7), (8) und $(u_i, v_i) \in \Sigma_i$, s. Abb. 3

$$v_i = V(M(u_i)), \quad u_i = s_i(v_i) = s_i(V(M(u_i))) \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \tag{9}$$

Nun untersuchen wir den Ausdruck $\delta^i(u_\infty - u_i)$. Es gilt, s. Gl. (9)

$$\begin{aligned} \delta^i(u_\infty - u_i) &= \delta^i[s_\infty(V(M(u_\infty))) - s_i(V(M(u_i)))] \\ &= \delta^i[s_\infty(V(M(u_\infty))) - s_\infty(V(M(u_i)))] + \delta^i[s_\infty(v_i) - s_i(v_i)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Der zweite Summand ist $\sigma_i(v_i)$ gemäss Lemma 1.

Die Funktion $u \to f(u) := s_\infty(V(M(u)))$ ist eine reellwertige Funktion der reellen Variablen $u$. Es ist

$$s_\infty(V(M(u_\infty))) - s_\infty(V(M(u_i))) = f(u_\infty) - f(u_i) = f'(u_\infty)(u_\infty - u_i) + O((u_\infty - u_i)^2),$$

und daher mit Gl. (10)

$$\delta^i(u_\infty - u_i) = f'(u_\infty)\delta^i(u_\infty - u_i) + \delta^i(u_\infty - u_i)O(u_\infty - u_i) + \sigma_i(v_i).$$

Daraus folgt

$$\delta^i(u_\infty - u_i) = \frac{\sigma_i(v_i)}{1 - f'(u_\infty) + O(u_\infty - u_i)}. \tag{11}$$

Für $i \to \infty$ konvergiert die Folge $\sigma_i(v_i)$ dank Lemma 1 gegen $\sigma_\infty(v_\infty)$. Im Nenner von Gl. (11) strebt der letzte Summand gegen 0. Somit folgt

$$\lim_{i\to\infty} \delta^i(u_\infty - u_i) = \frac{\sigma_\infty(v_\infty)}{1 - f'(u_\infty)}. \tag{12}$$

Man beachte, dass $f'(u_\infty)$ in der Nähe des Fixpunktes $g$ klein ist, weil die Fläche $\Sigma_\infty$ den stabilen Eigenraum $E_s$ berührt, cf. Fig. 3. Der Nenner $1 - f'(u_\infty)$ verschwindet deshalb in hinreichender Nähe des Fixpunktes nicht.

Wir übertragen schliesslich das Resultat auf die Konvergenz der Parameterstellen $\mu_i$. Die Taylorentwicklung der Funktion $\mu = M(u)$ an der Stelle $u_\infty$ lautet

$$\mu = \mu_\infty + M'(u_\infty)(u - u_\infty) + O((u - u_\infty)^2).$$

Für $u = u_i$ folgt daraus

$$\delta^i(\mu_\infty - \mu_i) = M'(u_\infty)(\delta^i(u_\infty - u_i)) + O(\delta^i(u_\infty - u_i)(u_\infty - u_i))$$

und damit das Ergebnis

$$\lim_{i\to\infty} \delta^i(\mu_\infty - \mu_i) = \frac{M'(u_\infty)\sigma_\infty(v_\infty)}{1 - f'(u_\infty)} =: H. \tag{13}$$

Der Wert von $H$ hängt von der gewählten Familie $F_\mu$ ab. Für die Differenzen-Quotienten-Folge $\delta_i$ ergibt sich

$$\delta_i := \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i} = \frac{(\mu_i - \mu_\infty) + (\mu_\infty - \mu_{i-1})}{(\mu_{i+1} - \mu_\infty) + (\mu_\infty - \mu_i)} = \frac{\delta^i(\mu_i - \mu_\infty) + \delta\delta^{i-1}(\mu_\infty - \mu_{i-1})}{\delta^{-1}\delta^{i+1}(\mu_{i+1} - \mu_\infty) + \delta^i(\mu_\infty - \mu_i)}$$

Der letzte Quotient konvergiert für $i \to \infty$ gegen

$$\frac{-H + \delta H}{-\delta^{-1}H + H} = \delta.$$

Damit ist der Beweis von Satz 1 vollständig und es ist skizziert, wie aus den Hypothesen von Feigenbaum das Phänomen der Universalität folgt.

# 3 Niedrigdimensionale Näherungen

## 3.1 Die Abbildungen $\tau_d$

Wie kann man den Fixpunkt $g$ des Operators $\tau$ finden, bzw. seine Existenz begründen? $g$ ist gewiss kein Polynom, denn: ist F ein Polynom vom Grad $n$, so ist $\tau F$ ein Polynom vom Grad $n^2$.[6] Man muss deshalb den Operator $\tau$ in einem grösseren Funktionenraum betrachten und dort den Fixpunkt suchen. Ist $F$ eine Funktion aus der Grundmenge $\mathbf{G}$, so kann man sie an der Stelle $x = 0$ jedenfalls in eine formale Potenzreihe

$$F(x) = 1 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6 + \dots$$

entwickeln. Es liegt nahe, *näherungsweise* mit *abbrechenden* Potenzreihen, d. h. mit Polynomen zu arbeiten.

Wir wählen dazu eine natürliche Zahl $d$. Für Polynome der Art

$$F(x) = 1 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6 + \dots + a_dx^{2d}$$

hat $\tau F$ die Form

$$(\tau F)(x) = 1 + b_1x^2 + b_2x^4 + b_3x^6 + \dots + b_dx^{2d} + [b_{d+1}x^{2d+2} + \dots + b_{2d^2}x^{4d^2}]$$

Wir vernachlässigen die Terme in der eckigen Klammer. Damit ist durch $\tau$ eine Zuordnung der Koeffizienten

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_d) \longrightarrow (b_1, b_2, b_3, \dots, b_d)$$

definiert, die wir als Abbildung eines gewissen Bereichs $D \subseteq \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ auffassen können. Die so definierte Abbildung $\tau_d$ nennen wir die *d-dimensionale Näherung* an $\tau$.

## 3.2 Der Fixpunkt und die Linearisierung von $\tau_d$

**Eindimensionale Näherung.** Wir gehen aus von $F(x) = 1+a_1x^2$, bilden $(\tau F)(x)$, vergl. Abschnitt 2.1 und lassen den Term 4. Grades in $x$ weg. Man findet

$$\tau_1 : a_1 \to b_1 = \tau_1(a_1) = 2a_1^2(1 + a_1).$$

Die Fixpunktbedingung in der vorliegenden Näherung lautet

$$\tau_1(a_1) = a_1 = 2a_1^2(1 + a_1).$$

Diese kubische Gleichung hat die Lösungen $a_1 = 0$ und $a_1 = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$. Von diesen ist nur

$$a_1 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \approx -1.366$$

von Interesse, da $a_1 < 0$ sein muss damit $F \in \mathbf{G}$ ist.

[6] Die Wahl $n = 1$ kommt als Lösung nicht in Frage, weil die linearen Funktionen nicht unimodal sind.

Für die Parameterstellen $\mu_i$ bei der Periodenverdoppelungs-Sequenz der Familie $F_\mu = 1 - \mu x^2$ gilt $\lim_{i\to\infty} \mu_i \approx 1.40$, wie wir wissen, vergl. Tabelle 1. Die Funktion $F_{\mu_\infty}$ liegt recht nahe bei der Funktion $F(x) = 1 - 1.366x^2$. Damit zeichnet sich im Funktionenraum die "Gegend" ab, wo der Fixpunkt von $\tau$ liegt.

**Zweidimensionale Näherung.** Nun gehen wir aus von einer Funktion

$$F(x) = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4,$$

wenden $\tau$ darauf an und lassen in $\tau F = 1 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + O(x^6)$ alle Terme 6. und höheren Grades weg. Für die Koeffizienten $b_1(a_1, a_2), b_2(a_1, a_2)$ ergibt sich

$$\begin{cases} b_1 &= 2a_1(a_1 + 2a_2)(1 + a_1 + a_2) \\ b_2 &= [a_1(2a_2 + a_1^2) + 2a_2(2a_2 + 3a_1^2)](1 + a_1 + a_2)^3 \end{cases} \tag{14}$$

Die Fixpunktgleichungen

$$b_1(a_1, a_2) = a_1, \quad b_2(a_1, a_2) = a_2 \tag{15}$$

bilden ein System von zwei nichtlinearen Gleichungen für $a_1$ und $a_2$. Wir versuchen gar nicht erst, dieses System algebraisch aufzulösen, denn für $d \geq 3$ wird dies ohnehin nicht möglich sein.

Wie kann man die Lösung des Systems (15) bestimmen? Wir schlagen vor, das Newton-Verfahren zu benützen[7]. Wir setzen $\vec{a} =: (a_1, a_2)^\top$, führen die Jacobi-Matrix $D\tau_2(\vec{a})$, wie üblich, mithilfe der partiellen Ableitungen

$$D\tau_{2,pq}(\vec{a}) = \frac{\partial b_p}{\partial a_q}(\vec{a}) \quad (p, q = 1, 2)$$

ein, und definieren das Newton-Verfahren durch

$$\vec{a}_{n+1} = \vec{a}_n + [D\tau_2(\vec{a}_n) - I]^{-1}(\vec{a}_n - \tau(\vec{a}_n)),$$

dabei bezeichnet $I$ die $2\times 2$–Einheitsmatrix. Mit dem Startvektor $\vec{a}_0 = (-1.366, 0)^\top$ erhält man nach 7 Schritten

$$a_1 = -1.522241561779241 \quad a_2 = 0.1276132572115043 \tag{16}$$

und bei weiterer Anwendung des Verfahrens bleiben diese Werte unverändert.

In Tabelle 2, s. Abschnitt 1.2, sind für die Familie $F_\mu = 1 - \mu x^2 + 0.1x^4$ (man beachte: $0.1 \approx a_2 = 0.1276$) einige Resultate zum Periodenverdoppelungsprozess angegeben, insbesondere wurde gezeigt, dass die $\mu_i$ gegen $\mu_\infty \approx 1.50$ streben. Dies entspricht recht gut dem Wert $a_1 = -1.5222$.

**Höherdimensionale Näherungen.** Das Vorgehen wiederholt sich nun. Für $d = 3$ gehen wir aus von $F(x) = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6$, bilden $(\tau F)(x) = 1 + b_1 x^2 +$

[7] Weil es ja um die Bestimmung eines Fixpunktes geht, könnte man auf die Idee kommen diesen einfach durch Iteration bestimmen zu wollen. Weil der Fixpunkt $g$ der Abbildung $\tau$ hyperbolisch ist, s. Hypothese 2, wird auch der zu bestimmende Fixpunkt der Näherung $\tau_2$ hyperbolisch sein, d. h. er kann nicht durch gewöhnliche Iteration bestimmt werden.

| | $d=3$ | $d=5$ | $d=7$ | $d=10$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_{d,1}=$ | -1.5218434 | -1.5277465 | -1.527632 | -1.52763299 |
| $a_{d,2}=$ | 0.072931 | 0.105178 | 0.10481 | 0.10481519 |
| $a_{d,3}=$ | 0.045508 | 0.026417 | 0.02670 | 0.02670568 |
| $a_{d,4}=$ | | -0.003388 | -0.003528 | -0.00352742 |
| $a_{d,5}=$ | | $3.02*10^{-5}$ | $8.21*10^{-5}$ | $8.161*10^{-5}$ |
| $a_{d,6}=$ | | | $2.5*10^{-5}$ | $2.528*10^{-5}$ |
| $a_{d,7}=$ | | | $-2.5*10^{-6}$ | $-2.55*10^{-6}$ |
| $a_{d,8}=$ | | | | $-9.8*10^{-8}$ |
| $a_{d,9}=$ | | | | $2.9*10^{-8}$ |
| $a_{d,10}=$ | | | | $\approx 5*10^{-10}$ |

Tabelle 6: Berechnung des Fixpunktes für verschiedene Dimensionen

$\ldots + b_3x^6 + O(x^8)$ und lassen die Terme der Ordnung 8 und höher weg. So gewinnt man die Abbildung $(a_1, a_2, a_3) \to (b_1, b_2, b_3)$, die wir hier nicht explizit protokollieren. Der Fixpunkt, d. h. die Lösung des Systems $b_i(a_1, a_2 a_{,3}) = a_i, \quad i = 1,2,3$ wird wieder mit der Newton-Methode berechnet. Der Aufwand für die Bestimmung der partiellen Ableitungen $\frac{\partial b_p}{\partial a_q}$ ist bereits recht gross, und deshalb wurden alle algebraischen und numerischen Berechnungen ab dieser Stelle mit dem Algebra-Programm "Mathematica" ausgeführt[8]. Als Startwert für das Newton-Verfahren nehmen wir für $a_1$ und $a_2$ die Werte aus Gl. (16) und $a_3 = 0$.

Die Resultate für den Fixpunkt $\vec{a}_d = (a_{d,1}, a_{d,2}, \ldots, a_{d,d})$ für $d = 3,5,7,10$ sind in Tabelle 6 zusammengestellt. Man beachte, dass sich die Erhöhung der Dimension auf alle Koeffizienten auswirkt.

Man sieht, dass sich die Koeffizienten zeilenweise stabilisieren. Die Funktion

$$F(x) = 1 - 1.52763299x^2 + 0.10481519x^4 + 0.02670568x^6 + \ldots + 5*10^{-10}x^{20} \quad (17)$$

ist der Fixpunkt von $\tau_{10}$ und es ist zu hoffen, dass F eine gute Näherung für den Fixpunkt von $\tau$ ist.

## 3.3 Die Eigenwerte von $D\tau_d$

In Feigenbaums Hypothesen spielen die Eigenwerte von $D\tau$, der Linearisierung des Operators $\tau$ in seinem Fixpunkt (der universellen Funktion) $g$, eine wichtige Rolle. Es liegt deshalb nahe, zu den endlich-dimensionalen Abbildungen $\tau_d$ die Linearisierung $D\tau_d$ im jeweiligen Fixpunkt $\vec{a}_d$ zu betrachten und die Eigenwerte von $D\tau_d$ zu berechnen. Tatsächlich wurden die Abbildungen $D\tau_d$ bereits im vorangegangenen Abschnitt verwendet (um mit der Newton-Methode die Fixpunkte zu berechnen).

Wir diskutieren kurz den Fall $d = 2$. Die Abbildung $\tau_2$ wird durch Gl. (14) gegeben, für den Fixpunkt fanden wir $\vec{a}_2 \approx (-1.5222, 0.1276)^\top$, s. Gl. (16). Für die

[8]Die Autoren danken Frau S. Ketterer für die Ausführung dieser Arbeit.

| | $d=1$ | $d=2$ | $d=3$ | $d=5$ | $d=7$ | $d=10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_1 \approx$ | 5.73 | 4.8442 | 4.51651 | 4.6704 | 4.6692 | 4.669202 |
| $\lambda_2 \approx$ | | -0.4856 | -0.08902 | 0.2076 | 0.2790 | 0.1596 |
| $\lambda_3 \approx$ | | | 0.51000 | -0.0755 | 0.1579 | -0.2400 |
| $\lambda_4 \approx$ | | | | 0.2902 | -0.1236 | -0.1236 |
| $\lambda_5 \approx$ | | | | -0.1286 | 0.0322 | -0.0573 |
| $\lambda_6 \approx$ | | | | | -0.0539 | 0.0258 |
| $\lambda_7 \approx$ | | | | | -0.0331 | -0.0100 |
| $\lambda_8 \approx$ | | | | | | -0.0036 |
| $\lambda_9 \approx$ | | | | | | $0.0084 + 0.0021i$ |
| $\lambda_{10} \approx$ | | | | | | $0.0084 - 0.0021i$ |

Tabelle 7: Eigenwerte von $D\tau_d(\vec{a}_d)$ für $d = 1, 2, 3, 5, 7, 10$

Jacobi-Matrix am Fixpunkt findet man

$$D\tau_2 \approx \begin{pmatrix} 6.0588 & 6.2603 \\ -1.2698 & -1.7002 \end{pmatrix}.$$

Sie hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 \approx 4.8442, \quad \lambda_2 \approx -0.4856.$$

Man konstatiert, dass $\lambda_1$ recht nahe bei der universellen Konstanten $\delta \approx 4.669$ liegt.

Die Eigenvektoren sind

$$\vec{e}_1 \approx (1.0, -0.194)^\top, \quad \vec{e}_2 \approx (1.0, -1.045)^\top.$$

Der Eigenvektor $\vec{e}_1$ zu $\lambda_1$ spannt den 1−dimensionalen, unstabilen Eigenraum $E_{u,2}$ auf. Das ist eine Gerade in der $a_1 - a_2$−Ebene durch $\vec{a}_2$ mit dem Richtungsvektor $\vec{e}_1$. Auf $E_{u,2}$ ist $D\tau_2$ expandierend. Der Eigenvektor $\vec{e}_2$ zu $\lambda_2$ spannt den 1−dimensionalen, stabilen Eigenraum $E_{s,2}$ auf. $E_{s,2}$ ist eine Gerade durch $\vec{a}_2$ mit dem Richtungsvektor $\vec{e}_2$. Die beiden Geraden $E_{u,2}$, $E_{s,2}$ sind in Abb. 1 eingezeichnet. $E_{s,2}$ fällt fast mit $\Sigma_{\infty,2}$ zusammen. Damit ist die Richtung von $\Sigma_{\infty,2}$ mit $D\tau_2$ in Verbindung gebracht.

Diese Überlegungen lassen sich auch für andere Werte von $d$ durchführen. In Tabelle 7 sind die Eigenwerte zu $D\tau_d(\vec{a}_d)$ für verschiedene Werte von $d$ angegeben. Offenbar gibt es nur einen Eigenwert mit Betrag $> 1$. Er unterscheidet sich mit wachsendem $d$ immer weniger von der universellen Konstanten $\delta$. Alle übrigen Eigenwerte sind betragsmässig kleiner als 1.

Diese Rechnungen stützen die Feigenbaum-Hypothesen.

## 3.4 Zum *Beweis* von Feigenbaums Hypothesen

Lanford, [7], hat einen Computer gestützten Beweis für die Richtigkeit der Feigenbaum-Hypothesen gegeben, s. auch [4]. Weil sich gewisse Querverbindungen zu den

voranstehenden Erörterungen herstellen lassen, referieren wir den Gedankengang summarisch.

Zunächst muss die *Existenz* des Fixpunktes $g$ des Verdoppelungsoperators $\tau$ (s. Abschnitt 2.2, Hypothese 1) bewiesen werden. Lanford gibt dazu ohne weitere Angaben ein Polynom $g_0(x)$ vom Grad 20 an, das fast Fixpunkt ist, d. h. es ist $g_0 - \tau(g_0) \approx 0$. Die Koeffizienten von $g_0$ stimmen mit jenen des Polynoms $F$ von Gl. (17) überein (ev. mit Ausnahme der letzten dort angegebenen Ziffer).

Nun denken wir uns die Newton-Methode mit der Startfunktion $g_0$ angewandt. Das ist analog zu dem, was wir in Abschnitt 3.2 unternommen haben, jedoch nun in einem unendlich dimensionalen Funktionenraum. Die Rekursionsgleichung lautet

$$g_{n+1} := g_n + [D\tau_{g_n} - I]^{-1}(g_n - \tau(g_n)) =: \Phi(g_n).$$

Hier steht $D\tau_{g_n}$ für die (Fréchet-) Ableitung von $\tau$ an der Stelle $g_n$. $D\tau$ ist also die Verallgemeinerung der Jacobi-Matrix auf den unendlich-dimensionalen Fall.

Damit ist der Operator $\Phi$ definiert. Die Existenz eines Fixpunktes $g$ von $\Phi$, und damit von $\tau$, ergibt sich aus einem Fixpunktsatz der folgenden Art. Es sei $\|.\|$ eine geeignete Norm.

**Satz 2** Voraussetzung. *Es gibt Zahlen $\epsilon > 0, \beta > 0$ und $0 < \rho < 1$ sodass gilt*

1. $\|\Phi(g_0) - g_0\| < \epsilon$
2. *Aus* $\|F - g_0\| < \beta$ *folgt* $\|D\Phi_{g_0}(F - g_0)\| \leq \rho$
3. $\beta > \frac{\epsilon}{1-\rho}$

Behauptung. *Die Gleichungen $\Phi(F) = F$ bzw. $\tau(F) = F$ haben eine Lösung $g$ mit*

$$\|g - g_0\| < \frac{\epsilon}{1-\rho} < \beta.$$

*Unter allen Funktionen $F$ mit $\|F - g_0\| < \beta$ ist $g$ der einzige Fixpunkt von $\Phi$ bzw. $\tau$.*

Der Beweis dieses Satzes erfolgt mit dem Kontaktionsprinzip.

*Bemerkungen zu den Voraussetzungen: 1.* ist eine Bedingung über die Güte von $g_0$ als "Fast-Fixpunkt". Aus *2.* folgt, dass $\Phi$ kontrahierend ist. Die Voraussetzung *3.* sorgt dafür, dass die Anwendung von $\Phi$ auf ein $F$ mit $\|F - g_0\| < \frac{\epsilon}{1-\rho}$ nicht aus dieser Kugel herausführt.

Zurück zum Beweis von Lanford. Es musste gezeigt werden, dass die Voraussetzungen von Satz 2 tatsächlich erfüllt sind. Die Schranken $\epsilon, \beta, \rho$ wurden zum Teil numerisch mit dem Computer berechnet. Dabei wurden die Rundungsfehler durch sog. intervall-arithmetische Methoden (d. h. durch per Computer berechnete, aber sichere Abschätzungen) kontrolliert[9]. Der Fixpunktsatz liefert so die behauptete universelle Funktion $g$, den Fixpunkt von $\tau$. Die Taylorentwicklung von $g$ stimmt bis zum Glied $x^{20}$ fast mit $g_0$ bzw. unserem $F$, s. Gl. (17) überein. Aus den obigen und weiteren Abschätzungen ergeben sich dann auch noch die einschlägigen Aussagen über die Eigenwerte von $D\tau$ am Fixpunkt $g$.

[9]Man spricht in diesem Zusammenhang von einem Computer gestützten Beweis (computer assisted proof).

# Literatur


[1] Collet, P., Eckmann, J.P.: *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, 1980.

[2] Cvitanovic, P. (Ed.): *Universality in Chaos*, 1989.

[3] de Melo, W., van Strien, S. : *One-dimensional Dynamics*, 1993.

[4] Eckmann, J.P., Koch, H., Wittwer, P.: *A computer-assisted proof of universality for area-preserving maps*, Mem. AMS Vol. 47, No. 289, 1984.

[5] Feigenbaum, M.J.: *Universal Behaviour in Nonlinear Systems*, Los Alamos Science 1, 1980. S. auch [2] p. 49-84.

[6] Kirchgraber, U.: *Als Poincaré, Hadamard und Perron die invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten*, s. vorangehenden Artikel.

[7] Lanford, O.E.: *A Computer-assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures*, Bull. Am. Math. Soc. 6, 1982, 427-434. S. auch [2] p. 245-252.

[8] Szczygielski, W. M.: *Dynamischer Verhalten eines schnell drehenden Rotors bei Anstreifvorgängen*, Dissertation Nr. 8094, ETH-Zürich, 1986.

Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

**Berichte über Mathematik und Unterricht**

| | | |
|---|---|---|
| 89-01 | H. Walser | Fraktale |
| 89-02 | H.R. Schneebeli | Zwei Fallstudien zur Geometrie |
| 89-03 | W. Büchi | Astronomie im Mathematikunterricht |
| 89-04 | M. Adelmeyer | Theorem von Sarkovskii |
| 90-01 | U. Kirchgraber | Von Mathematik und Mathematikunterricht |
| 90-02 | A. Kirsch | Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"? |
| 90-03 | U. Kirchgraber | Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II |
| 91-01 | A. Barth | Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule |
| 91-02 | U. Kirchgraber | Smale's Beweis des Fundamentalsatzes |
| 91-03 | M. Federer | Preistheorie |
| 91-04 | M. Gauglhofer | Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen |
| 92-01 | U. Kirchgraber | Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen |
| 93–01 | M. Huber, U. Manz, H. Walser | Annäherung an den Goldenen Schnitt |
| 93–01(I) | M. Huber, U. Manz, H. Walser | Approccio alla Sezione Aurea |
| 93–02 | P. Gallin, H. Keller, H. Stocker | Perspektive und Axonometrie |
| 93–02(I) | P. Gallin, H. Keller, H. Stocker | Prospettiva e Assonometria |
| 93–03 | H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig | Verzweigungsphänomene |
| 93–03(I) | H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig | Fenomeni di Biforcazione |
| 93–04 | H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti | Der Fallschirmspringer |
| 93–04(I) | H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti | Il Paracadutista |
| 93–05 | H.R. Schneebeli | Alles fliesst – Mit dem Graphikrechner zu den Quellen der Analysis |
| 93–06 | H. Biner | Kongruenzabbildungen und Symmetrien im Euklidischen Raum |
| 93–07 | U. Kirchgraber | Hundert Jahre Störungstheorie – Differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev |
| 94–01 | U. Maurer | Kryptologie: Mathematik zwischen Anwendung und Ästhetik |
| 94–02 | H. Klemenz | Computergestützte Raumgeometrie |
| 94–03 | F. Barth | Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt - Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit |
| 94–04 | W. Henn | Auto und Verkehr – Beispiele aus der Analysis zum realitätsnahen Mathematikunterricht |
| 95–01 | N. Sigrist | Auf der Kippe |

| | | |
|---|---|---|
| 95–02 | U.Kirchgraber | Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten. |
| | U. Kirchgraber, N. Sigrist | Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze |