ETH *EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH*

Berichte über Mathematik und Unterricht
Herausgeber: U. Kirchgraber

Bericht No. 91–02
Januar 1991

Smale's Beweis des Fundamentalsatzes

von Urs Kirchgraber, Zürich

Eidgenössische Technische Hochschule
CH – 8092 Zürich

Zusammenfassung

Der bekannte "Satz über implizite Funktionen" und der damit eng verwandte "Satz über die Umkehrabbildung" – er besagt, dass eine Abbildung in einer Umgebung einer regulären Stelle bijektiv ist – sind typisch *lokale* Resultate. Im Gegensatz dazu ist der Fundamentalsatz der Algebra (auch Satz von Gauss genannt) ein *globales* Resultat: zu einem Polynom p gibt es *irgendwo* in der komplexen Ebene eine Stelle, an der p verschwindet. Smale hat in [2] einen neuen Beweis dieses Satzes gegeben, der auf der wiederholten Anwendung des Satzes über die Umkehrabbildung beruht; das globale Ergebnis wird also auf ein lokales Resultat zurückgeführt. In dieser Notiz führen wir den Beweis von Smale aus.

Satz über die Umkehrabbildung

Sei p ein Polynom n-ten Grades (o.B.d.A. darf angenommen werden, dass der Koeffizient der höchst vorkommenden Potenz 1 ist). Wir brauchen folgende Definition. $z \in \mathbb{C}$ heisst *reguläre Stelle* (von p), falls $p'(z) \neq 0$. Die Bedeutung des Begriffs folgt aus dem Satz über die Umkehrabbildung: *Sei z eine reguläre Stelle von p und $w = p(z)$. Dann gibt es eine offene Kreisscheibe $B_\delta(w)$ mit w als Mittelpunkt und mit Radius $\delta > 0$, sowie eine Umgebung U von z, sodass U durch p bijektiv auf $B_\delta(w)$ abgebildet wird,* cf. Fig. 1.

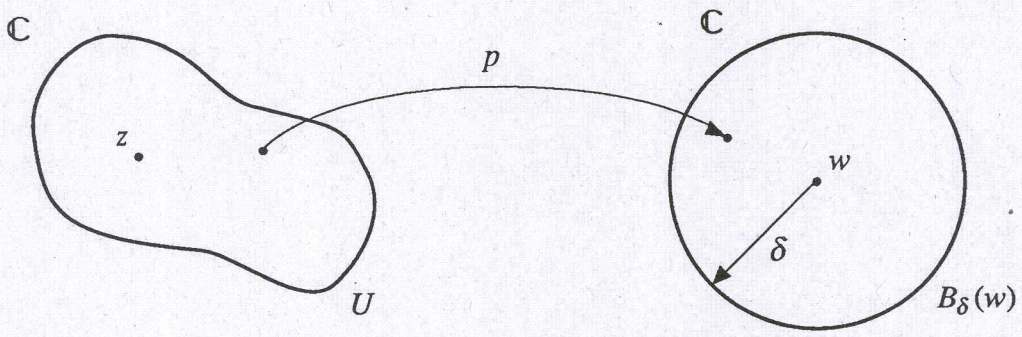

Fig. 1

Man beachte, dass δ i.a. von z abhängt. Am Schluss dieser Notiz stellen wir den Zusammenhang zur geläufigeren Formulierung des Satzes über die Umkehrabbildung her.

Gilt $p'(z) = 0$, heisst z *kritische Stelle* (von p). Da ein Polynom $(n-1)$-ten Grades höchstens $n-1$ verschiedene Nullstellen hat (wie bekanntlich aus dem Divisionsalgorithmus folgt) ist die Menge der kritischen Stellen endlich und daher auch die Menge Ω_{krit} der *kritischen Werte*; dabei nennen wir $w \in \mathbb{C}$ einen kritischen Wert (von p), wenn die

Urbildmenge $p^{-1}(w)$ von w unter p eine kritische Stelle enthält. Anders ausgedrückt: Ω_{krit} ist die Menge der Bilder der kritischen Stellen unter p, cf. Fig. 2.

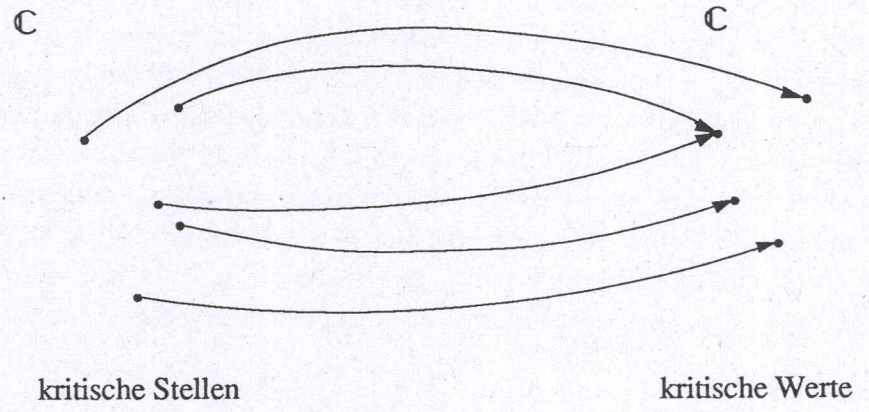

Fig. 2

Der Fundamentalsatz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass $p^{-1}(0)$ nicht leer ist. Um dieses Ziel zu erreichen machen wir

Annahme (1). *Nehmen wir an, dass es einen Punkt $w_0 \neq 0$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*
(a) *$p^{-1}(w_0)$ ist nicht leer,* d.h. *es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = w_0$.*
(b) *Das Segment S von 0 nach w_0,* d.h. *$S = \{tw_0 | t \in [0,1]\}$, enthält keinen kritischen Wert,* cf. Fig. 3.

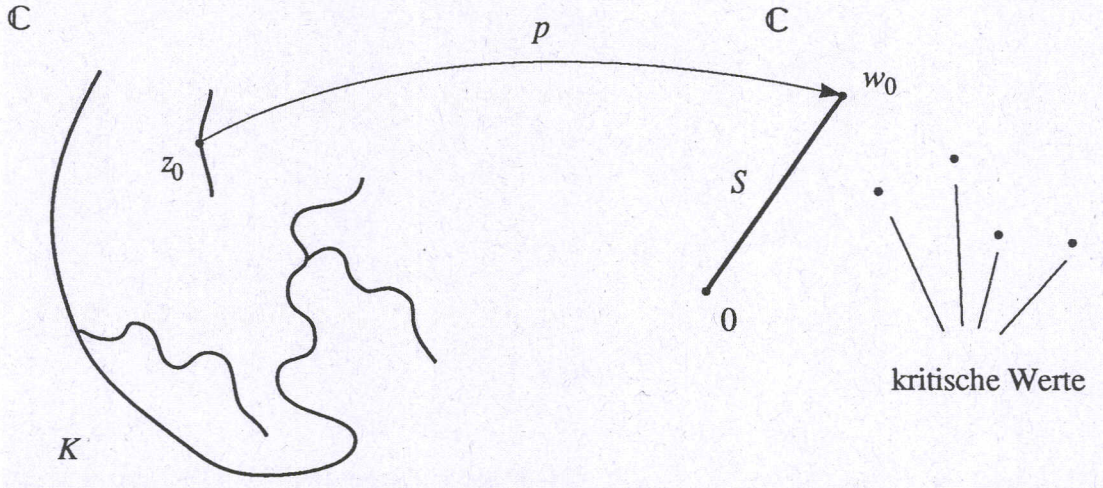

Fig. 3

Nun betrachten wir das Urbild K von S bezüglich p. K enthält offenbar keine kritischen Stellen, *besteht also aus lauter regulären Stellen;* d.h. der Satz über die Umkehrabbildung ist auf jeden Punkt z in K anwendbar. Tatsächlich gilt auf K die folgende

"Gleichmässige" Version des Satzes über die Umkehrabbildung. *Es gibt eine positive Zahl δ, sodass folgendes gilt. Sei $z \in K$ beliebig und $w = p(z)$. Dann gibt es eine Umgebung U von z, sodass U durch p auf $B_\delta(w)$ bijektiv abgebildet wird.* Der springende Punkt ist, dass δ von z unabhängig ist.

Wir zeigen nun, dass es in K einen Punkt gibt, der durch p auf 0 abgebildet wird, womit der Satz von Gauss unter der Annahme 1 und modulo der obigen Behauptung bewiesen ist.

Wir wählen eine ntürliche Zahl N so gross, dass $\frac{|w_0|}{N} < \delta$ gilt und setzen $w_i = w_0 - i\frac{w_0}{N}$ für $i = 0, 1, \ldots, N$. *Wir behaupten, dass diese w_i Urbilder in K haben,* d.h. dass es Punkte $z_i \in K$ gibt mit $p(z_i) = w_i, i = 0, 1, \ldots, N$. Diese Behauptung ist gemäss Annahme 1 (a) jedenfalls für $i = 0$ wahr. Sie gelte weiter für irgend ein i. Dann wenden wir die gleichmässige Version des Satzes über die Umkehrabbildung auf z_i an: Es gibt eine Umgebung U von z_i, die bijektiv auf $B_\delta(w_i)$ abgebildet wird, cf. Fig. 4. Da der Abstand von w_{i+1} zu w_i nach Konstruktion kleiner als δ ist, gilt $w_{i+1} \in B_\delta(w_i)$, und folglich gibt es einen Punkt z_{i+1}, der durch p auf w_{i+1} abgebildet wird; damit ist die Behauptung bewiesen.

Aus $w_N = 0$ folgt schliesslich $p(z_N) = 0$.

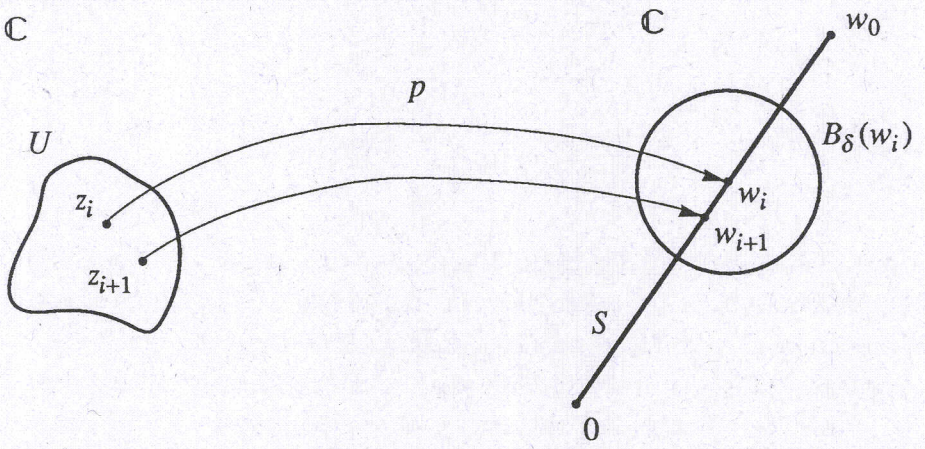

Fig. 4

Als nächstes befassen wir uns mit der gleichmässigen Version des Satzes über die Umkehrabbildung.

Kompaktheit von K. Wir behaupten *K ist eine nichtleere, kompakte Menge.* Wegen $z_0 \in K$ ist K nichtleer. Als Urbild einer abgeschlossenen Menge bezüglich der stetigen Funktion p ist K ebenfalls abgeschlossen. Es bleibt zu zeigen, dass K eine beschränkte Menge ist. Es sei $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ mit $a_n = 1$ und $\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$, $R \geq max(1, \alpha)$. Dann gilt, für $|z| \geq R$, wegen $|z|^i \leq |z|^{n-1}$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$, zunächst $\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||z|^i \leq \alpha|z|^{n-1}$ und daher, immer für $|z| \geq R$:

$$|p(z)| \geq |z^n| - \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right| \geq |z|^n - \alpha|z|^{n-1} = |z|^{n-1}(|z| - \alpha) \geq R^{n-1}(R - \alpha)$$

Die Folgerung ist: p bildet das Äussere des Kreises um 0 mit Radius R in das Äussere des Kreises um 0 mit Radius $R' := R^{n-1}(R-\alpha)$ ab, cf. Fig. 5. Nun denke man sich R so gross gewählt, dass das Segment S ganz in der Kreisscheibe $B_{R'}(0)$ enthalten ist, cf. Fig. 5. Dann muss das Urbild K von S bezüglich p in $B_R(0)$ liegen, d.h. K ist beschränkt.

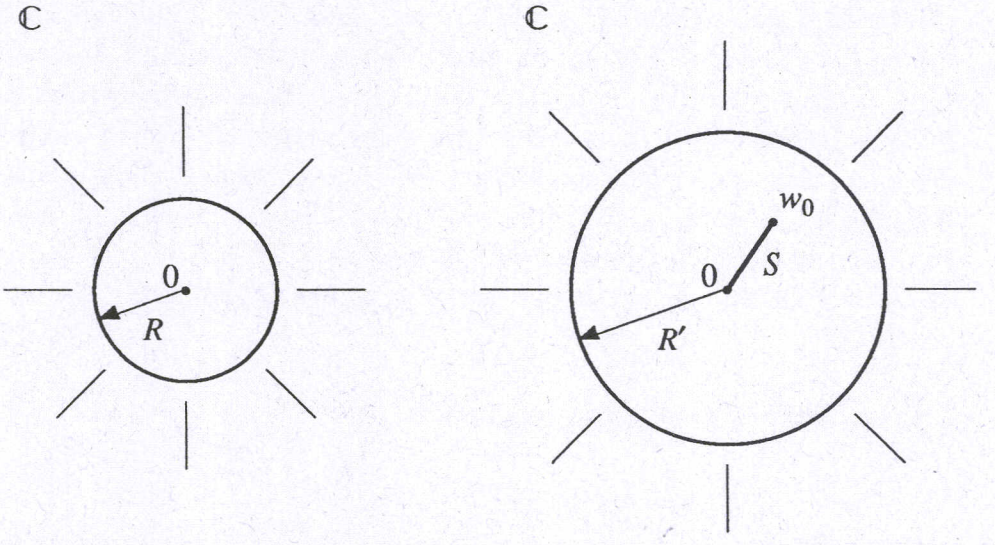

Fig. 5

Beweis der gleichmässigen Version Es sei K eine beliebige nichtleere kompakte Menge von regulären Stellen (für p). Es sei $z \in K$ für den Augenblick fest und $w = p(z)$. Wir nennen $\delta^* > 0$ für z *zulässig*, falls es eine Umgebung U von z gibt, sodass U durch p bijektiv auf $B_{\delta^*}(w)$ abgebildet wird. Aufgrund des Satzes über die Umkehrabbildung folgt, dass die Menge der zulässigen δ^* nichtleer ist; ihr Supremum bezeichnen wir mit $\delta(z)$, wobei $\delta(z) > 0$ gilt. Falls wir zeigen können, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$\delta(z) \geq \delta \quad \text{für alle} \quad z \in K$$

gilt, ist die Behauptung bewiesen. Nehmen wir an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es eine Folge z_i von Elementen aus K mit $\delta(z_i) \to 0$ für $i \to \infty$. Da K kompakt ist, kann o.B.d.A. angenommen werden, dass die Folge z_i in K konvergiert, sagen wir gegen $z \in K$. Wir wählen i so gross, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass

$$|p(z_i) - p(z)| + \delta(z_i) + 2\epsilon < \delta(z)$$

gilt. Aufgrund der Definition von $\delta(z)$ gibt es ein $\delta > \delta(z) - \epsilon$ und eine Umgebung $U(z)$ von z derart, dass $U(z)$ durch p bijektiv auf $B_\delta(w)$, $w = p(z)$, abgebildet wird. Aufgrund der obigen Ungleichung folgt, dass $B_{\delta(z_i)+\epsilon}(w_i)$ in $B_\delta(w)$ enthalten ist, $w_i = p(z_i)$; d.h. es gibt eine Umgebung U_i von z_i, welche durch p bijektiv auf $B_{\delta(z_i)+\epsilon}$ abgebildet wird, cf. Fig. 6; das ist ein Widerspruch zur Definition von $\delta(z_i)$ als Supremum.

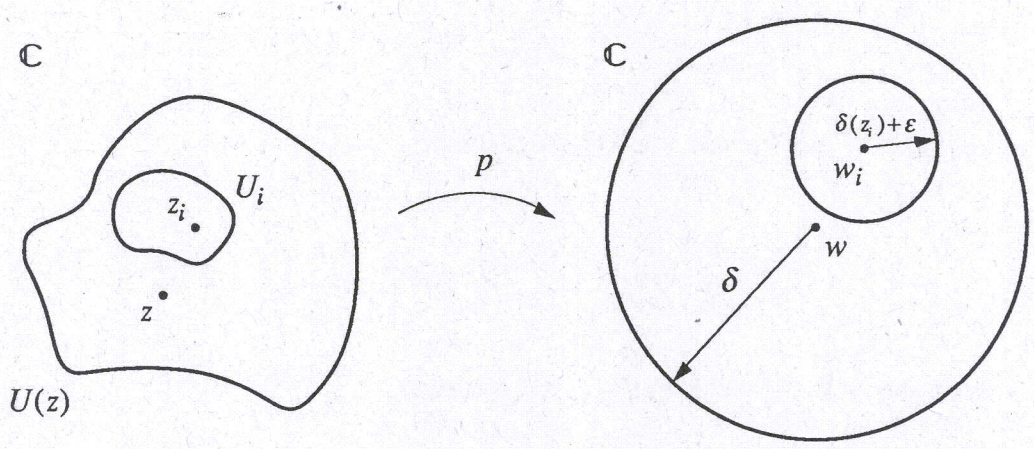

Fig. 6

Diskussion der Annahme (1). Da es nur endlich viele kritische Stellen von p gibt, gibt es sicher reguläre Stellen. Sei z_0 eine, und $w_0 = p(z_0)$. Ist $w_0 = 0$, so ist z_0 eine Nullstelle von p und der Satz von Gauss ist richtig. Sei $w_0 \neq 0$. Liegt auf dem Segment $S = \{tw_0 | t \in [0,1]\}$ kein kritischer Wert von p, dann ist die Annahme (1) erfüllt und die Richtigkeit des Satzes folgt aus unseren Ausführungen. Falls S kritische Werte enthält, unterscheiden wir zwei Fälle. 0 ist kritischer Wert (in diesem Fall hat p eine kritische Stelle als Nullstelle) oder 0 ist nicht kritischer Wert. Dann nehmen wir die Umgebung U von z_0, die Kreisscheibe $B_\delta(w_0)$, die der Satz über die Umkehrabbildung garantiert und betrachten n Segmente, mit Endpunkten in $B_\delta(w_0)$ und mit 0 als einzigen gemeinsamen Punkt, cf. Fig. 7. Da es höchstens $n-1$ kritische Werte gibt, erfüllt mindestens eines dieser Segmente Annahme (1). Und dann folgt wieder die Richtigkeit des Fundamentalsatzes.

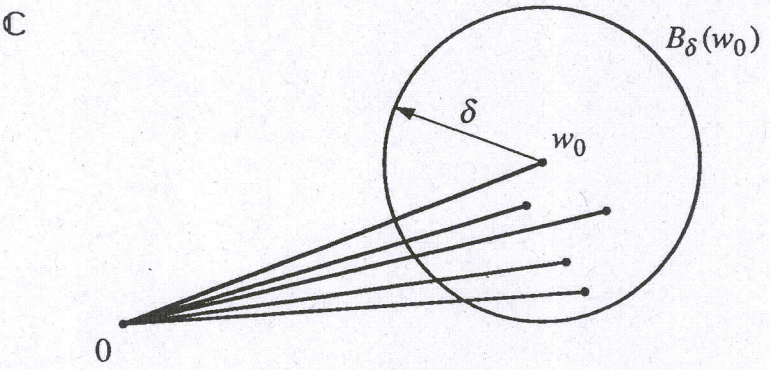

Fig. 7

Zusammenhang mit klassischer Formulierung Die klassische Formulierung des Satzes über die Umkehrfunktion findet man z.B. in [1]. Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und setzen $f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$. Statt $z \in \mathbb{C} \to f(z) \in \mathbb{C}$ betrachten wir $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (U(x,y), V(x,y)) \in \mathbb{R}^2$. Bekanntlich gelten die Cauchy-Riemannschen Beziehungen $U_x = V_y$, $U_y = -V_x$. Aus $f'(z) = U_x + iV_x$ folgt demnach

$$|f'(z)|^2 = U_x^2 + V_x^2 = U_x^2 + U_y^2$$

Andererseits gilt für die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(U,V)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_x & U_y \\ -U_y & U_x \end{vmatrix} = U_x^2 + U_y^2$$

Damit sind alle Zusammenhänge hergestellt.

Literatur

[1] **Blatter, C.**, *Analysis III*, 1974

[2] **Smale, S.**, On the Efficiency of Algorithms of Analysis, Bull. AMS, 13, 1985, p. 87-121.

Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89-01	H. Walser	Fraktale
89-02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89-03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89-04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90-01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90-02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
90-03	U. Kirchgraber	Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II
91–01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91-02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes