$$\int \exp(x^2)\,dx = ?$$

Warum denn ist $\exp(x^2)$ nicht elementar integrierbar?

ETH-Bericht über Mathematik und Unterricht

von Martin Huber

Technikum Winterthur und
Universität Zürich

Vorwort

In jedem Unterricht über Integralrechnung muss die Frage auftauchen, ob denn jede „vernünftige" Funktion elementar („geschlossen") integriert werden könne. Dass die Antwort „Nein" ist, wussten schon Laplace und Liouville. Letzterer bewies 1833, dass die Funktion e^{x^2} keine elementare Stammfunktion besitzt [L]. Wir haben uns daran gewöhnt, in unserem Unterricht dieses Ergebnis zu erwähnen, ohne uns um seinen Ursprung – geschweige denn um seinen Beweis – zu kümmern.

Ein moderner, algebraischer Beweis des Hauptresultats von [L] wurde Ende der Sechzigerjahre, unabhängig und fast gleichzeitig, von Risch [R1] und Rosenlicht [Ro1] publiziert. Der algebraische Hintergrund ist die von Ritt [Ri2] und Kolchin [Ko] entwickelte Theorie der Differentialkörper. Es ist die Absicht des Verfassers, einem breiteren Publikum von Mathematikerinnen und Mathematikern einen Einblick in die algebraische Form der Liouvilleschen Theorie zu geben.

Aus den von Risch und anderen entwickelten Methoden ist der sog. Risch-Algorithmus entstanden. Dieser Algorithmus erlaubt es zu entscheiden, ob eine gegebene Funktion eine elementare Stammfunktion besitzt, und – im affirmativen Fall – diese auch tatsächlich zu berechnen. Der Risch-Algorithmus ist Bestandteil jedes leistungsfähigen symbolischen Mathematikprogramms.

Im Gegensatz zum Vortrag von Roman Mäder am Tag für Mathematik und Unterricht in Solothurn (1994) geht es hier nicht um die konkrete Beschreibung des Risch-Algorithmus, sondern um die Darstellung des abstrakten algebraischen Hintergrunds. In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, dass die ETH in Manuel Bronstein einen Spezialisten für *Symbolische Integration* besitzt; sein im Oktober 1996 erschienenes Buch setzt Massstäbe für dieses Teilgebiet der Computer-Algebra [B].

Unterstützt durch das Programm „ETH für die Schule" konnte ich meinen Weiterbildungsurlaub im Sommersemester 1995 am Seminar für Angewandte Mathematik verbringen. Ein wesentlicher Teil der vorliegenden Arbeit entstand während dieser Zeit. Es war dies für mich ein anregender und bereichernder Urlaub, an den ich gerne zurückdenke. Ich möchte Urs Kirchgraber für seine Unterstützung und Gastfreundschaft herzlich danken.

I Elementare Stammfunktionen

Wir betrachten zunächst nur Funktionen einer reellen Variablen x. In der üblichen Terminologie umfasst die Klasse $\mathcal{E}$ der *elementaren Funktionen* die rationalen Funktionen, die Exponential- und Logarithmusfunktionen, die algbraischen Funktionen, die trigonometrischen und die zyklometrischen Funktionen sowie die hyperbolischen und die invers-hyperbolischen Funktionen. Zudem ist die Klasse $\mathcal{E}$ abgeschlossen gegenüber Zusammensetzung.

Für eine (integrierbare) Funktion f steht das *unbestimmte Integral* $\int f(x)\,dx$ für die Klasse aller Stammfunktionen von f. Ist F eine solche Stammfunktion, so schreiben wir wie üblich

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Im folgenden geben wir einige wohlbekannte Beispiele von elementaren Funktionen, welche elementare Stammfunktionen besitzen. Allerdings ist keine allgemeine Regel erkennbar, wie man vom Integranden zur Stammfunktion gelangt. Anschliessend notieren wir drei Beispiele, von denen man weiss, dass ihre Stammfunktionen nicht elementar sind.

Beispiele 1

(a) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

(b) $$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

(c) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

(d) $$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Beispiele 2

Die unbestimmten Integrale

$$\int e^{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

sind nicht elementar. Dies soll auf den folgenden Seiten gezeigt werden.

II Die Funktion $\exp(x^2)$ ist nicht elementar integrierbar.

Der Gang des vorzuführenden Beweises ist lang und kompliziert. Deshalb beginnen wir mit einer knapp formulierten Übersicht über diesen Beweis. Daran mag der Leser sich wieder orientieren, wenn er im Dornengestrüpp der nachfolgenden Abschnitte sich zu verirren droht.

Der Beweis besteht aus drei Teilen.

Teil 1: ***Das Prinzip von Liouville*** (vgl. Abschnitt III und Anhang B)

Die folgende vorläufige Fassung dieses Prinzips ist ungenau, hat aber den Vorteil der unmittelbaren Verständlichkeit. Die definitive Fassung (s. Abschnitt III) ist in der Terminologie der Differential-Algebra formuliert. Mit h' wird die Ableitung der Funktion h bezeichnet.

Es sei f eine Funktion aus einer Klasse $\mathcal{F}$, welche sämtliche Konstanten und die Identität enthält und gegenüber rationalen Operationen abgeschlossen ist. Besitzt nun f eine elementare Stammfunktion, so gibt es Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ und Funktionen $g_1, g_2, \ldots, g_n$ und h in der Klasse $\mathcal{F}$ so, dass $f = h' + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{g_k'}{g_k}$ (1)

Teil 2: ***Das Reduktions-Argument*** (vgl. Abschnitt V)

Wir setzen $\theta = e^{x^2}$. Es sei $\mathcal{F}$ die Klasse aller rationalen Funktionen in θ, deren Koeffizienten selber rationale Funktionen (der einen Varaiablen x) sind. Wir nehmen an, $f = \theta$ besitze eine elementare Stammfunktion. Nach dem Prinzip von Liouville ist dann θ von der Form $\theta = h' + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{g_k'}{g_k}$. Dabei sind die g_k und h rationale Funktionen in θ, und deren Koeffizienten sind rational in x. Wir werden im fünften Abschnitt zeigen, dass dann der Term $\sum_{k=1}^{n} c_k\, g_k'/g_k$ von θ unabhängig ist und dass h dargestellt werden kann als $h = \sum_{k=-1}^{m} h_k \theta^k$, wobei die h_k rationale Funktionen in x sind. Aus der Annahme, θ besitze eine elementare Stammfunktion, folgt also, dass $\theta = g + h'$, wobei g von θ unabhängig ist und $h = \sum_{k=-1}^{m} h_k \theta^k$.

Teil 3: ***Die* RISCH*sche Differentialgleichung*** (vgl. Abschnitt VI)

Wir differenzieren die Funktion h (nach x): $h' = \sum_{k=-1}^{m}\left(h_k'\,\theta^k + h_k\,k\,\theta^{k-1}\,\theta'\right)$

Nun ist aber $\theta' = (e^{x^2})' = 2xe^{x^2} = 2x\theta$. Somit haben wir

$$\theta = g + h' = g + \sum_{k=-1}^{m}\left(h_k' + 2kxh_k\right)\theta^k$$

Der Koeffizientenvergleich liefert sofort

$$h_1' + 2xh_1 = 1 \qquad (2)$$

Dies ist die sog. *RISCHsche Differentialgleichung* (vgl. [R1]) für die Funktion $\theta = e^{x^2}$. Wir werden im sechsten Abschnitt zeigen, dass diese Differentialgleichung keine rationale Funktion als Lösung besitzt. Dies widerspricht jedoch der Darstellung von θ als $\theta = g + h'$ und damit unserer Annahme. Also hat e^{x^2} tatsächlich keine elementare Stammfunktion.

III Differential-Algebra

Wie oben erwähnt, benötigen wir für die Formulierung der präzisen Fassung des Prinzips von LIOUVILLE einige Begriffe der Differential-Algebra. Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie findet der Leser in [Ri2], [Ko], [Ka] oder auch in [B].

Definition 1

Ein *Differentialkörper* ist ein Körper F mit einer Abbildung $\delta: F \to F$, derart dass

$$\delta(f+g) = \delta(f) + \delta(g)$$

und

$$\delta(f \cdot g) = \delta(f)g + f\delta(g)$$

für alle $f, g \in F$.

Die Abbildung δ nennen wir *Ableitung* oder *Derivation* auf F.

Einfache Konsequenzen dieser Definition sind die üblichen Ableitungsregeln

$$\delta(0) = 0 = \delta(1)$$

$$\delta(-f) = -\delta(f) \qquad \text{für alle } f \in F$$

$$\delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\delta(f)g - f\delta(g)}{g^2} \qquad \text{für alle } f, g \in F \text{ mit } g \neq 0$$

$$\delta(f^n) = n f^{n-1}\delta(f) \qquad \text{für alle } f \in F \text{ und } n \neq 0$$

Ferner gelten die Regeln für das „logarithmische Ableiten":

$$\frac{\delta(fg)}{fg} = \frac{\delta(f)}{f} + \frac{\delta(g)}{g} \qquad \text{und}$$

$$\frac{\delta(f/g)}{f/g} = \frac{\delta(f)}{f} - \frac{\delta(g)}{g} \qquad \text{für alle } f, g \in F \text{ mit } f \neq 0 \text{ und } g \neq 0.$$

Wir setzen $F_0 = \{c \in F \mid \delta(c) = 0\}$. Aus der Definition und den Ableitungsregeln folgt, dass F_0 ein Körper ist; F_0 heisst *Konstantenkörper* des Differentialkörpers (F, δ).

Beispiele

Die Mengen $\boldsymbol{Q}(x)$, $\boldsymbol{R}(x)$, $\boldsymbol{C}(x)$ der rationalen Funktionen über den Körpern $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ bzw. $\boldsymbol{C}$, versehen mit der üblichen Ableitung, sind Differentialkörper. Die zugehörigen Konstantenkörper sind gerade $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ bzw. $\boldsymbol{C}$.

Es sei nun F ein Differentialkörper mit der Ableitung δ_F. Ferner sei G ein Differentialkörper mit der Ableitung δ_G und gleichzeitig Erweiterungskörper von F. Ist nun δ_G eine Fortsetzung von δ_F, d.h. $\delta_G|_F = \delta_F$, so nennen wir den Körper G mit der Ableitung δ_G einen *Differential-Erweiterungskörper* von (F, δ_F).

Im Anhang A werden wir zeigen, dass bei einer *algebraischen* Erweiterung G eines Differentialkörpers (F, δ_F) die Ableitung δ_F auf genau eine Weise zu einer Ableitung δ_G auf G erweitert werden kann.

Definition 2

Es sei G ein Differential-Erweiterungskörper des Differentialkörpers F, und θ sei ein Element von G. Für die Ableitung auf F und auch für diejenige auf G schreiben wir im folgenden stets δ.

(a) θ ist *algebraisch* über F, falls es ein Polynom $p(x)$ mit Koeffizienten aus F gibt, derart dass $p(\theta) = 0$.

(b) θ heisst *logarithmisch* über F, falls es ein Element $u \in F$ gibt mit $\delta(\theta) = \delta(u)/u$.

(c) θ heisst *exponentiell* über F, falls es ein Element $u \in F$ gibt, sodass $\delta(\theta)/\theta = \delta(u)$.

(d) θ heisst *transzendent* über F, falls θ nicht algebraisch ist über F.

Bemerkung

Es gibt Erweiterungen von Differentialkörpern mit Elementen, welche gleichzeitig algebraisch und exponentiell bzw. algebraisch und logarithmisch sind. Wir betrachten z.B. die reelle Funktion $f(x) = \exp(x/2)$. Mit der Bezeichnung $\theta_1 = \exp x$ ist f gleichzeitig exponentiell und algebraisch über $\boldsymbol{Q}(x, \theta_1)$. Für weitere Beispiele siehe etwa [GCL, S. 515–517].

Es sei G ein Erweiterungskörper des Körpers F und θ ein Element von G. Dann gibt es einen kleinsten Teilkörper von G, welcher sowohl F als auch θ enthält. Dieser wird mit $F(\theta)$ bezeichnet; man sagt, er entstehe aus F durch *Adjungieren* des Elements θ. Ist θ algebraisch über F, so ist $F(\theta)$ isomorph zu einem Faktorring des Polynomrings $F[x]$ nach einem maximalen Ideal. Ist θ hingegen transzendent, so ist $F(\theta)$ isomorph zum Körper $F(x)$ der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in F. Allgemeiner wird der kleinste Teilkörper von G, welcher sowohl F als auch die Elemente $\theta_1, \ldots, \theta_n \in G$ enthält, mit $F(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ bezeichnet.

Definition 3

Eine *elementare Erweiterung* eines Differentialkörpers F ist ein Differential-Erweiterungskörper G von F, der durch sukzessives Adjungieren von algebraischen, logarithmischen oder exponentiellen Elementen entstanden ist. Eine elementare Erweiterung von F ist somit von der Form $G = F(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, wobei für jedes k mit $1 \leq k \leq n$ das Element θ_k über dem Teilkörper $F_{k-1} = F(\theta_1, \ldots, \theta_{k-1})$ von G algebraisch, logarithmisch oder exponentiell ist. (Dabei ist $F_0 = F$.)

Wir nennen im folgenden eine Funktion f *reell-elementar*, falls f zu einer elementaren Erweiterung F des Funktionenkörpers $\boldsymbol{R}(x)$ gehört und der Konstantenkörper F_0 mit $\boldsymbol{R}$ übereinstimmt. Analog nennen wir eine Funktion g *komplex-elementar*, falls g zu einer elementaren Erweiterung G von $\boldsymbol{C}(x)$ gehört und $G_0 = \boldsymbol{C}$ ist.

Beispiele

(**1**) Die Funktionen $f: x \mapsto \sinh x$ und $f^{-1}: x \mapsto \operatorname{arsinh} x$ sind reell-elementar:

Es gilt $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \in \boldsymbol{R}(x, \theta)$ mit $\theta = e^{x}$:

θ ist exponentiell über $\boldsymbol{R}(x)$.

Ferner ist $\operatorname{arsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \in \boldsymbol{R}(x, \theta_1, \theta_2)$

mit $\theta_1 = \sqrt{x^2+1}$ und $\theta_2 = \log(x + \theta_1)$.

Offenbar ist θ_1 algebraisch über $\boldsymbol{R}(x)$, und θ_2 ist logarithmisch über $\boldsymbol{R}(x, \theta_1)$.

(**2**) Die Funktionen $g: z \mapsto \tan z$ und $g^{-1}: z \mapsto \arctan z$ sind komplex-elementar:

Einerseits gilt

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{-2iz} + 1} \in \boldsymbol{C}(z, \theta)$$

mit $\theta = e^{iz}$; θ ist exponentiell über $\boldsymbol{C}(z)$.

Andererseits ist

$$\arctan z = -\frac{i}{2}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \in \boldsymbol{C}(z, \theta)$$

mit $\theta = \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$. Offensichtlich ist θ logarithmisch über $\boldsymbol{C}(z)$.

Wir sind nun in der Lage, die präzisierte algebraische Fassung des Prinzips von Liouville vorzustellen. Einen Beweis für dieses fundamentale Theorem findet der interessierte Leser im Anhang B.

Theorem (Liouville/Ostrowski/Risch/Rosenlicht)

Gegeben ist ein Differentialkörper F der Charakteristik 0 mit Konstantenkörper F_0. Es sei f ein Element von F, für welches die Gleichung $\delta(g) = f$ eine Lösung g in einer elementaren Erweiterung G von F besitzt, deren Konstantenkörper G_0 mit F_0 übereinstimmt.

Dann gibt es Elemente $u_0, u_1, \ldots, u_n \in F$ und $c_1, \ldots, c_n \in F_0$ derart, dass

$$f = \delta(u_0) + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\delta(u_k)}{u_k}$$

Eine Vorform dieses Satzes findet sich bei Ostrowski [O]; die aktuelle Fassung erschien in Arbeiten von Rosenlicht [Ro1] und Risch [R1], die fast gleichzeitig zur Publikation eingereicht worden waren.

Bemerkungen

1. Ist F ein Funktionenkörper, so besagt das Liouvillesche Prinzip, dass eine Stammfunktion einer Funktion aus F nur dann elementar ist (bezgl. F), wenn sie als Summe einer Funktion aus F und dem Logarithmus einer Funktion aus F dargestellt werden kann.

2. Es gilt auch die Umkehrung dieses Prinzips:

Gegeben ist ein Differentialkörper F mit Konstantenkörper F_0. Besitzt nun das Element f von F eine Darstellung der Form

$$f = \delta(u_0) + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\delta(u_k)}{u_k}$$

mit $u_0, u_1, \ldots, u_n \in F$ und $c_1, \ldots, c_n \in F_0$, so gibt es eine elementare Erweiterung G von F, in der die Gleichung $\delta(g) = f$ eine Lösung besitzt.

Man wähle $G = F(x_1, \ldots, x_n)$, den Körper der rationalen Funktionen in n Unbestimmten über F. Es ist nun leicht einzusehen, dass es genau eine Fortsetzung der Ableitung δ von F zu einer Ableitung δ_G auf G gibt, für welche $\delta_G(x_k) = \frac{\delta(u_k)}{u_k}$ für $1 \leq k \leq n$. Somit erfüllt $g = u_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$ die Gleichung $\delta(g) = f$. Zudem ist die so konstruierte Erweiterung G elementar, da für jedes k mit $1 \leq k \leq n$ das Element x_k logarithmisch ist über $F(x_1, \ldots, x_{k-1})$.

3. Das folgende Beispiel zeigt, dass auf die Voraussetzung $G_0 = F_0$ nicht verzichtet werden kann. Die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ besitzt die Stammfunktion $g\colon x \mapsto \arctan x$. Aufgefasst als Funktion von $\boldsymbol{C}$ nach $\boldsymbol{C}$ ist g komplex-elementar (vgl. Bsp. 2 oben). Andererseits besitzt f keine Stammfunktion der Gestalt

$$h = u_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \log(u_k)$$

mit $u_0, u_1, \ldots, u_n \in \boldsymbol{R}(x)$ und $c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{R}$. Aus dem Prinzip von Liouville folgt, dass f überhaupt keine reell-elementare Stammfunktion besitzt. Da $\boldsymbol{C}$ eine algebraische Erweiterung von $\boldsymbol{R}$ ist, gehört die Stammfunktion g von f zwar zu einer elementaren Erweiterung von $\boldsymbol{R}(x)$, doch deren Konstantenkörper ist $\boldsymbol{C}$ und nicht $\boldsymbol{R}$.

IV. Hilfssätze

In diesem Abschnitt werden drei Hilfssätze bereitgestellt. Lemma 1 und Lemma 3 werden für das Reduktions-Argument (Abschnitt V) benötigt. Lemma 2 hingegen wird erst im Anhang B Verwendung finden.

Lemma 1

> Für jede nicht-konstante Funktion $g \in \boldsymbol{C}(z)$ ist die Funktion $\exp g$ transzendent über $\boldsymbol{C}(z)$.

Dies kann mit Argumenten der komplexen Funktionentheorie begründet werden. Wir übernehmen hier den Beweis von [Ro2], in welchem die Struktur von $\boldsymbol{C}(z)$ als Differentialkörper verwendet wird. Die Ableitung von $f \in \boldsymbol{C}(z)$ bezeichnen wir mit f'.

Beweis: Wir nehmen an, $g \in \boldsymbol{C}(z)$ sei eine Funktion, für welche $\exp g$ algebraisch ist über $\boldsymbol{C}(z)$. Wir werden diese Annahme widerlegen.

Es sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ das Minimalpolynom von $\theta = \exp g$ über $\boldsymbol{C}(z)$. Die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sind somit rationale Funktionen mit Koeffizienten aus $\boldsymbol{C}$. Es gilt also

$$\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + a_1\theta + a_0 = 0.$$

Wegen $\theta' = g'\theta$ erhalten wir beim Differenzieren dieser Identität

$$ng'\theta^n + (a'_{n-1} + (n-1)a_{n-1}g')\theta^{n-1} + \ldots + a'_0 = 0.$$

Also ist θ auch Nullstelle des Polynoms

$$q(x) = ng'x^n + (a'_{n-1} + (n-1)a_{n-1}g')x^{n-1} + \ldots + a'_0.$$

Da g nicht konstant ist, gilt $g' \neq 0$. Somit hat $q(x)$ denselben Grad wie $p(x)$. Da aber $p(x)$ das Minimalpolynom von θ ist, muss $q(x)$ von der Form $q(x) = a(x)p(x)$ sein. Nun haben aber $p(x)$ und $q(x)$ denselben Grad; also besitzt $a(x)$ den Grad 0, d.h. es gilt $q(x) = a\,p(x)$ für eine Funktion $a \in \boldsymbol{C}(z)$.

Der Koeffizientenvergleich für $q(x)$ und $a\,p(x)$ liefert jetzt $ng' = a$ und $a'_0 = aa_0$; folglich gilt $ng' = a'_0/a_0$.

Nun ist aber $a_0 = a_0(z)$ von der Form $a_0(z) = r(z)/s(z)$ für Elemente $r(z), s(z)$ aus dem Polynomring $\boldsymbol{C}[z]$. Für die logarithmische Ableitung von $a_0(z)$ gilt dann

$$\frac{a_0'(z)}{a_0(z)} = \frac{r'(z)}{r(z)} - \frac{s'(z)}{s(z)}.$$

Hat nun $r(z)$ einen Teiler $(z-z_0)^m$, so ist $(z-z_0)^{m-1}$ Teiler von $r'(z)$; und dasselbe gilt für $s(z)$. Wir schliessen, dass in der gekürzten Darstellung die Nenner der rechten Seite höchstens einfache Nullstellen besitzen. Somit liefert die Partialbruchzerlegung eine Summe von Brüchen mit konstanten Zählern und linearen Nennern. Andererseits kann g' als Ableitung einer nicht-konstanten Funktion aus $\boldsymbol{C}(z)$ nicht Summe solcher Brüche sein. Wegen $n g' = a_0'/a_0$ ist dies ein Widerspruch. Somit war die Annahme falsch, d.h. $\exp g$ ist transzendent über $\boldsymbol{C}(z)$. □

Für die folgenden zwei Hilfssätze ist $G = F(\theta)$ eine elementare Erweiterung eines Differentialkörpers F, und θ ist transzendent über F. Unter diesen Voraussetzungen ist der Polynomring $F[\theta]$ isomorph zu $F[x]$. Somit ist es sinnvoll, über den Grad von Elementen aus $F[\theta]$ zu sprechen.

Lemma 2

Es sei F ein Differentialkörper und $G = F(\theta)$ eine elementare Erweiterung von F mit demselben Konstantenkörper. Dabei sei θ logarithmisch und transzendent über F. Für jedes Polynom $f \in F[\theta]$ mit $\operatorname{Grad} f > 0$ ist dann auch die Ableitung $\delta(f)$ in $F[\theta]$, und es gilt:

(1) Ist der Leitkoeffizient von f nicht konstant, so ist $\operatorname{Grad} \delta(f) = \operatorname{Grad} f$.

(2) Hat f einen konstanten Leitkoeffizienten, so ist $\operatorname{Grad} \delta(f) = \operatorname{Grad} f - 1$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist θ logarithmisch über F, d.h. es gibt ein Element $u \in F$ mit $\delta(\theta) = \delta(u)/u$. Insbesondere ist dann $\delta(\theta) \in F$.

Es sei nun $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \theta^k$ mit $n > 0$. Ableiten liefert

$$\begin{aligned}
\delta(f) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\delta(a_k)\theta^k + a_k\,\delta(\theta^k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\delta(a_k)\theta^k + k a_k \theta^{k-1}\,\delta(\theta)\right) \\
&= \delta(a_n)\theta^n + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\delta(a_k) + (k+1)\,a_{k+1}\,\delta(\theta)\right)\theta^k
\end{aligned}$$

Wegen $\delta(\theta) \in F$ ist $\delta(f)$ somit ein Polynom in $F[\theta]$. Gilt ferner $a_n \notin F_0$, so ist $\delta(a_n) \neq 0$, also hat $\delta(f)$ denselben Grad wie f. Dies beweist (**1**).

Nehmen wir nun an, a_n sei konstant, d.h. $\delta(a_n) = 0$. In diesem Fall hat $\delta(f)$ einen kleineren Grad als f. Ferner kann der Koeffizient von θ^{n-1} in der Polynomdarstellung von $\delta(f)$ geschrieben werden als

$$\delta(a_{n-1}) + na_n\delta(\theta) = \delta(a_{n-1} + na_n\theta)$$

Würde nun dieser Koeffizient verschwinden, so wäre folglich $a_{n-1} + na_n\theta$ konstant und somit ein Element von F. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass θ transzendent ist über F. Folglich gilt $\delta(a_{n-1}) + na_n\delta(\theta) \neq 0$; d.h. $\text{Grad}\,\delta(f) = \text{Grad}\,f - 1$. Dies vervollständigt den Beweis von Lemma 2. □

Lemma 3

Es sei F ein Differentialkörper und $G = F(\theta)$ eine elementare Erweiterung von F mit demselben Konstantenkörper. Dabei sei θ exponentiell und transzendent über F. Dann gilt für jedes Polynom $f \in F[\theta]$ mit $\text{Grad}\,f > 0$:

(**1**) $\delta(f)$ ist ein Polynom in $F[\theta]$ und hat denselben Grad wie f;

(**2**) $\delta(f)$ ist genau dann ein nichttriviales Vielfaches von f in $F[\theta]$, wenn f ein Monom ist.

Beweis: Nach Voraussetzung ist θ exponentiell über F, also gibt es ein Element $u \in F$ mit $\delta(u) = \delta(\theta)/\theta$. Es sei f zunächst ein Monom, also von der Form $f = a\theta^n$ mit $a \in F\backslash\{0\}$ und $n > 0$. Dann gilt

$$\delta(f) = \delta(a)\theta^n + na\delta(\theta)\theta^{n-1} = (\delta(a) + na\delta(u))\theta^n \quad (*),$$

letzteres wegen $\delta(\theta) = \delta(u)\theta$. Angenommen $\delta(a) + na\delta(u) = 0$, so wäre $\delta(f) = 0$ und somit $a\theta^n = f \in F_0$. Also wäre θ algebraisch über F, im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich gilt $\delta(a) + na\delta(u) \in F\backslash\{0\}$, und nach (*) ist $\delta(f)$ somit ein Monom vom selben Grad wie f. Dies beweist die zweite Hälfte von (**2**).

Es sei nun $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \theta^k$ ein beliebiges Polynom aus $F[\theta]$ mit Grad $n > 0$. Wegen $(*)$ gilt dann offenbar

$$\delta(f) = \sum_{k=0}^{n} (\delta(a_k) + k a_k \delta(u))\theta^k \quad (**).$$

Dasselbe Argument wie im ersten Teil des Beweises zeigt, dass für $k > 0$ aus $a_k \neq 0$ stets folgt, dass $\delta(a_k) + k a_k \delta(u) \in F \setminus \{0\}$. Also ist $\delta(f) \in F[\theta]$ und hat denselben Grad wie f. Damit ist Teil (**1**) bewiesen.

Es bleibt zu zeigen, dass auch die erste Hälfte von Teil (**2**) gilt. Zu diesem Zweck sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \theta^k$ ein Polynom mit der Eigenschaft, dass $\delta(f)$ ein nichttriviales Vielfaches von f in $F[\theta]$ ist. Da beim Ableiten der Grad des Polynoms nicht erhöht werden kann, gibt es folglich ein Element $a \in F \setminus \{0\}$ mit $\delta(f) = af$. Unter Berücksichtigung von $(**)$ liefert der Koeffizientenvergleich

$$\delta(a_k) + k a_k \delta(u) = a a_k, \quad 0 \leq k \leq n \qquad (***)$$

Im folgenden führen wir die Annahme, f sei kein Monom, auf einen Widerspruch. Ist f kein Monom, so gibt es Indices l, m mit $0 \leq l < m \leq n$ derart, dass $a_l \neq 0$ und $a_k \neq 0$. Mit $(***)$ folgt, dass

$$\frac{\delta(a_l) + l a_l \delta(u)}{a_l} = \frac{\delta(a_m) + m a_m \delta(u)}{a_m},$$

anders ausgedrückt, gilt

$$\frac{\delta(a_l)}{a_l} + l \frac{\delta(\theta)}{\theta} = \frac{\delta(a_m)}{a_m} + m \frac{\delta(\theta)}{\theta}$$

Wir folgern daraus, dass $\dfrac{\delta(a_l \theta^l)}{a_l \theta^l} = \dfrac{\delta(a_m \theta^m)}{a_m \theta^m}$ und somit

$$a_l \theta^l \delta(a_m \theta^m) - a_m \theta^m \delta(a_l \theta^l) = 0.$$

Letzteres bedeutet aber, dass $\delta\left(a_m \theta^m / a_l \theta^l\right) = 0$. Also ist $(a_m / a_l)\theta^{m-l}$ in F. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung, dass θ transzendent ist. Folglich ist f ein Monom. Dies vervollständigt den Beweis von Lemma 3. $\square$

V Das Reduktions-Argument

Etwas allgemeiner als im Abschnitt II betrachten wir hier die Frage, wann eine Funktion der Form $f(z)\exp g(z)$ eine elementare Stammfunktion besitze. Dabei sollen f und g Funktionen aus $\boldsymbol{C}(z)$ sein; wir setzen ferner voraus, dass $f \neq 0$ und g nicht konstant ist. Für solche Funktionen wollen wir in diesem Abschnitt die Reduktion von der Liouvilleschen Darstellung zur Risch'schen Differentialgleichung im Detail nachvollziehen.

Wir setzen $\theta = \exp g$. Der natürliche Rahmen für die weitere Untersuchung ist nun der Differentialkörper $\boldsymbol{C}(z,\theta)$ mit der üblichen Ableitung $\delta(f) = f'$. Das Element θ ist wegen $\theta'/\theta = (g'\exp g)/\exp g = g'$ exponentiell über dem Teilkörper $F := \boldsymbol{C}(z)$. Da g nicht konstant ist, folgt mit Lemma 1, dass θ transzendent ist über F. Ferner bemerken wir, dass F und $F(\theta) = \boldsymbol{C}(z,\theta)$ beide den Konstantenkörper $\boldsymbol{C}$ haben.

Für die folgende Überlegung nehmen wir an, dass $f\exp g$ eine komplex-elementare Stammfunktion besitze. Genauer gesagt setzen wir voraus, dass der Differentialkörper $\boldsymbol{C}(z,\theta)$ eine elementare Erweiterung (G,δ) mit Konstantenkörper $\boldsymbol{C}$ zulässt, in der die Gleichung $\delta(h) = f\exp g$ eine Lösung h hat. Nach dem Theorem besitzt dann $f\exp g = f\theta$ eine Darstellung

$$f\theta = u_0' + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{u_k'}{u_k} \qquad (\pounds)$$

für geeignete Funktionen $u_k \in F(\theta)$, $0 \leq k \leq n$ und Konstanten $c_k \in F(\theta)_0 = \boldsymbol{C}$, $1 \leq k \leq n$.

Über die Formel ($\pounds$) stellen wir die folgenden drei *Behauptungen* auf:

(1) Es darf angenommen werden, dass die rationalen Funktionen u_k, $1 \leq k \leq n$, normierte irreduzible Polynome sind.

(2) $u_0 = \sum_{k=-1}^{p} v_k\theta^k$ mit $v_k \in F$ für $-1 \leq k \leq p$.

(3) Der Term $\sigma := \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{u_k'}{u_k}$ ist von θ unabhängig.

Beweis von (1): Jede Funktion $u \in F(\theta)$ besitzt eine Darstellung der Form

$$u = a\,\frac{p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{\alpha_r}}{q_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot q_s^{\beta_s}}$$

Dabei ist $a \in F$, die Exponenten $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s$ sind positive ganze Zahlen, und bei den $p_1,\ldots,p_r,q_1,\ldots,q_s$ handelt es sich um normierte, irreduzible Polynome aus

$F[\theta]$. Wir dürfen annehmen, dass die obige Darstellung gekürzt ist; also sind die Mengen $\{p_1, \ldots, p_r\}$ und $\{q_1, \ldots, q_s\}$ disjunkt.

Nach den Regeln für die logarithmische Ableitung gilt dann

$$\frac{u'}{u} = \frac{a'}{a} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \frac{p_i'}{p_i} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \frac{q_j'}{q_j}.$$

Folglich kann der zweite Summand $\sigma = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot u_k'/u_k$ der rechten Seite von (£) dargestellt werden als $\sigma = a + \sum_{l=1}^{N} \tilde{c}_l \cdot f_l'/f_l$, mit $a \in F$, $\tilde{c}_l \in \boldsymbol{C}$ und $f_l \in F[\theta]$ für $1 \leq l \leq N$. Dabei sind sämtliche Polynome f_l normiert und irreduzibel. □

Beweis von (2): Die Funktion u_0 besitzt eine eindeutige Darstellung (Partialbruchzerlegung) der Form

$$u_0 = \tilde{u}_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{a_{kj}}{b_k^{\,j}}$$

mit $\tilde{u}_0, a_{kj}, b_k \in F[\theta]$. Dabei sind alle b_k normiert und irreduzibel, und es gilt

$\operatorname{Grad} a_{kj} < \operatorname{Grad} b_k$ für alle j, k mit $1 \leq j \leq n_k$ und $1 \leq k \leq n$.

Für die Ableitung von u_0 gilt dann

$$u_0' = \tilde{u}_0' + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{a_{kj}' b_k^{\,j} - a_{kj} j\, b_k^{\,j-1} b_k'}{b_k^{\,2j}} = \tilde{u}_0' + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{a_{kj}' b_k - j a_{kj} b_k'}{b_k^{\,j+1}}$$

Zusammen mit dem Ergebnis von (1) ergibt sich damit die Darstellung

$$f\theta = a + \tilde{u}_0' + \sum_{l=1}^{N} \tilde{c}_l \frac{f_l'}{f_l} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{a_{kj}' b_k - j a_{kj} b_k'}{b_k^{\,j+1}} \qquad (\$)$$

mit $a \in F$, $\tilde{u}_0, f_l, a_{kj}, b_k \in F[\theta]$, und die Polynome f_l und b_k sind normiert und irreduzibel für alle l, k mit $1 \leq l \leq N$ und $1 \leq k \leq n$.

Wegen der Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung, müssen sich die Summanden mit Nenner in (\$) gegenseitig kompensieren. Nehmen wir in (\$) zunächst die Brüche der Form

$$\frac{a_{kj}' b_k - j\, a_{kj} b_k'}{b_k^{\,j+1}} \qquad (\beta)$$

unter die Lupe. Jeder Nenner ist eine Potenz eines irreduziblen Polynoms, dessen Exponent mindestens gleich zwei ist. Da jedoch sämtliche Nenner f_l der anderen Summe in (\$) irreduzibel sind, kann ein Bruch der Form (β) nur dann vorkommen, wenn er mit b_k gekürzt

werden kann und $j=1$ ist. Offenbar kann ein Bruch der Form (β) genau dann mit b_k gekürzt werden, wenn b_k' ein Vielfaches von b_k ist.
Nach Lemma 3 ist dann aber b_k ein Monom. Andererseits ist b_k normiert und irreduzibel, also kommt nur $b_k = \theta$ in Frage. Dann hat aber u_0 die Form $u_0 = \sum_{k=-1}^{p} v_k \theta^k$ mit $v_k \in F$ für $-1 \leq k \leq p$; u_0 ist also ein verallgemeinertes Polynom. □

Beweis von (3): Die restlichen Nenner f_l in der Formel ($) sind irreduzibel. Diese können nur dann kompensiert werden, wenn gilt: $f_l = \theta$. Somit besitzt die Summe $\sum_{l=1}^{N} \tilde{c}_l \cdot f_l'/f_l$ höchstens einen nichttrivialen Summanden $c \cdot \theta'/\theta$. Da θ exponentiell ist über F, gilt insbesondere $\theta'/\theta \in F$. Somit ist auch $\sigma = a + c \cdot \theta'/\theta \in F$, d.h. σ ist von θ unabhängig. □

Zusammenfassung

Mit den am Anfang dieses Abschnitts eingeführten Bezeichnungen haben wir angenommen, dass die Funktion $f\theta$ eine komplex-elementare Stammfunktion besitze. Das Prinzip von Liouville hat dann die Summendarstellung (**£**) von $f\theta$ geliefert. Mit den soeben bewiesenen drei Behauptungen reduziert sich die Formel (**£**) zu

$$f\theta = u_0' + \sigma \qquad (\text{££})$$

mit $\sigma \in F$, wobei $u_0 = \sum_{k=-1}^{p} v_k \theta^k$ und $v_k \in F$ für $-1 \leq k \leq p$.

VI. Die RISCHsche Differentialgleichung

Der erste Summand der rechten Seite von (**££**) ist

$$u_0' = \sum_{k=-1}^{p} \left(v_k' \theta^k + v_k k \theta^{k-1} \theta' \right).$$

Wegen $\theta' = g'\theta$ haben wir somit

$$u_0' = \sum_{k=-1}^{p} \left(v_k' + k g' v_k \right) \theta^k .$$

Die Formel (££) wird damit zu

$$f\theta = \sigma + \sum_{k=-1}^{p} \left(v_k' + kg'v_k \right)\theta^k \qquad (\text{£££})$$

mit $f, \sigma, v_k, g \in F$, wobei $F = \mathbf{C}(z)$.

Der Koeffizientenvergleich in (£££) liefert nun als wesentliche Bedingung die Risch'sche Differentialgleichung

$$f = v_1' + g'v_1 \qquad (\mathbf{R})$$

wobei v_1 eine Funktion aus $\mathbf{C}(z)$ ist.

Wir haben somit gezeigt, dass die Lösbarkeit der Differentialgleichung (**R**) in $\mathbf{C}(z)$ notwendig dafür ist, dass die Funktion $f\exp g$ eine elementare Stammfunktion besitzt. (Dabei haben wir angenommen, dass $f, g \in \mathbf{C}(z)$, $f \neq 0$ und g nicht konstant ist.)

Davon ist aber auch die Umkehrung richtig. Um dies einzusehen, nehmen wir an, es gebe eine Funktion $v_1 \in \mathbf{C}(z)$, derart dass $f = v_1' + g'v_1$. Wegen $\theta' = g'\theta$ folgt daraus

$$f\theta = v_1'\theta + g'v_1\theta = v_1'\theta + v_1\theta' = (v_1\theta)'.$$

Also ist $v_1\exp g$ eine elementare Stammfunktion von $f\exp g$.

Wir behaupten nun

(**A**) Für $f(z) \equiv 1$ und $g(z) = z^2$ hat die Differentialgleichung (**R**) keine Lösung in $\mathbf{C}(z)$.

(**B**) Für $f(z) = \frac{1}{z}$ und $g(z) = z$ hat die Risch'sche Differentialgleichung ebenfalls keine rationale Lösung.

Beweis von (A): In diesem Fall lautet die Risch'sche Differentialgleichung

$$v_1' + 2zv_1 = 1 \qquad (\mathbf{R_A})$$

Wir nehmen an, $v_1 \in \mathbf{C}(z)$ sei eine Lösung. Dann ist offensichtlich $v_1 \neq 0$, und als rationale Funktion besitzt v_1 eine Darstellung $v_1 = p/q$ mit $p, q \in \mathbf{C}[z]$ und p, q teilerfremd. Wir differenzieren p/q und setzen das Ergebnis in ($\mathbf{R_A}$) ein:

$$\frac{p'q - pq'}{q^2} + 2z\frac{p}{q} = 1$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit q^2, so erhalten wir

$$p'q - pq' + 2zpq = q^2$$

In dieser Gleichung teilt q alle Summanden, ausser allenfalls pq'. Also muss q auch pq' teilen. Nun sind aber p und q teilerfremd; folglich wird q' von q geteilt. Für ein Polynom q ist dies aber nur möglich, wenn $q' \equiv 0$ gilt. Also ist q eine Konstante und v_1 somit ganz-rational. Ist jedoch v_1 ein Polynom, so ist auch die linke Seite von $(\mathbf{R_A})$ ein Polynom, und wegen $v_1 \neq 0$ ist dessen Grad mindestens gleich 1. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass die rechte Seite von $(\mathbf{R_A})$ eine Konstante ist. Folglich ist, wie behauptet, $(\mathbf{R_A})$ nicht lösbar in $\boldsymbol{C}(z)$.

Beweis von (B): Diesmal lautet die Risch'sche Differentialgleichung

$$v_1' + v_1 = \frac{1}{z} \qquad (\mathbf{R_B})$$

Wie im Beweis von $(\mathbf{A})$ führen wir die Annahme, dass diese Gleichung eine Lösung v_1 in $\boldsymbol{C}(z)$ habe, auf einen Widerspruch. Wieder stellen wir v_1 dar als $v_1 = p/q$ für teilerfremde $p, q \in \boldsymbol{C}[z]$. Nach leichter Rechnung erhalten wir diesmal

$$zp'q - zpq' + zpq = q^2$$

Da ja p und q teilerfremd sind, schliessen wir aus dieser Darstellung, dass q das Polynom zq' teilen muss. Dies ist aber nur dann möglich, wenn q ein Monom ist. Folglich kann v_1 dargestellt werden als $v_1(z) = \sum_{k=-m}^{n} a_k z^k$, d.h. v_1 ist ein verallgemeinertes Polynom. Ableiten und einsetzen in $(\mathbf{R_B})$ liefert

$$\sum_{k=-m}^{n} k a_k z^{k-1} + \sum_{k=-m}^{n} a_k z^k = \frac{1}{z}$$

Da die rechte Seite echt gebrochen ist, kann v_1 nicht ganz-rational sein; also ist $m > 0$. Somit erscheint aber links ein nichttrivialer Summand der Form $(-m)a_{-m}z^{-m-1}$. Dieser wird auf der rechten Seite nicht kompensiert, im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Darstellung verallgemeinerter Polynome. Also hat auch die Differentialgleichung $(\mathbf{R_B})$ keine Lösung in $\boldsymbol{C}(z)$. □

Mit derselben Methode lässt sich schliesslich zeigen, dass auch die Funktion $h(z) = \sin z/z$ nicht elementar integrierbar ist. Wir beachten zunächst, dass h geschrieben werden kann als $h = f\cdot(\theta - 1/\theta)$ mit $f = 1/2iz \in \boldsymbol{C}(z)$ und $\theta = e^{iz}$; θ ist exponentiell über $\boldsymbol{C}(z)$. Für diese Funktion h liefert das Prinzip von Liouville zusammen mit einer analogen Reduktion wie in Abschnitt V eine Darstellung der Form

$$h = f\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right) = \sigma + \sum_{k=-1}^{p} \left(v_k' + k g' v_k\right)\theta^k$$

mit $f, \sigma, v_k \in C(z)$ und $g(z) = iz$, also $g'(z) = i$. (Vgl. (**£££**), S. 17.) Der Koeffizientenvergleich liefert diesmal zwei wesentliche Bedingungen, nämlich:

$$f = v_1' + g' v_1 \quad (\mathbf{R}_1) \qquad \text{und} \qquad -f = v_{-1}' - g' v_{-1} \quad (\mathbf{R}_{-1})$$

Es genügt zu zeigen, dass $(\mathbf{R}_1)$ in $C(z)$ keine Lösung hat. Setzen wir für f und g ein, so wird $(\mathbf{R}_1)$ zur Risch'schen Differentialgleichung

$$v_1' + i v_1 = \frac{1}{2iz} \qquad (\mathbf{R}_1')$$

Wie in den Fällen (**A**) und (**B**) nehmen wir an, diese Differentialgleichung habe eine Lösung v_1 in $C(z)$. Gilt wieder $v_1 = p/q$ für teilerfremde $p, q \in C[z]$, so ergibt sich diesmal

$$\frac{p'q - pq'}{q^2} + i\frac{p}{q} = \frac{1}{2iz}$$

und, nach Multiplikation mit $2izq^2$,

$$2iz\,p'q - 2iz\,pq' - 2z\,pq = q^2$$

Wir schliessen, dass zq' durch q teilbar ist. Wie im Beweis von (**B**) zeigt sich, dass dann q ein Monom sein muss. Also ist v_1 wieder ein verallgemeinertes Polynom: $v_1(z) = \sum_{k=-m}^{n} a_k z^k$ Ableiten und in $(\mathbf{R}_1')$ einsetzen ergibt diesmal

$$\sum_{k=-m}^{n} k a_k z^{k-1} + \sum_{k=-m}^{n} i a_k z^k = \frac{1}{2iz}$$

Ganz analog zum Beweis von (**B**) resultiert nun ein Widerspruch aus der Eindeutigkeit der Darstellung verallgemeinerter Polynome. □

Anhang A: Zur Erweiterung von Differentialkörpern

Als Vorbereitung auf den Beweis des Theorems zeigen wir hier, dass jeder algebraische Erweiterungskörper eines Differentialkörpers mit der Charakteristik 0 wieder ein Differentialkörper ist. Präziser ausgedrückt, gilt die folgende Proposition:

Proposition

Es sei (F, δ_F) ein Differentialkörper mit der Charakteristik 0, und K sei ein algebraischer Erweiterungskörper von F. Dann gibt es genau eine Fortsetzung von δ_F zu einer Ableitung δ_K auf K.

Beweis: Wir betrachten den Polynomring $F[x]$ und definieren die Selbstabbildungen D_0, D_1 von $F[x]$ durch

$$f(x) \mapsto \big(D_0 f\big)(x) = \sum_{k=0}^{n} \delta_F(a_k) x^k$$

bzw.

$$f(x) \mapsto \big(D_1 f\big)(x) = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, x^{k-1}$$

wobei $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in F[x]$. Hat nun K die Struktur eines Differentialkörpers mit der Ableitung δ_K, welche δ_F fortsetzt, so gilt für jedes Element $\theta \in K$ und jedes Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in F[x]$:

$$\begin{aligned}
\delta_K\big(f(\theta)\big) &= \sum_{k=0}^{n} \delta_F(a_k)\theta^k + \sum_{k=0}^{n} a_k\, \delta_K(\theta^k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \delta_F(a_k)\theta^k + \sum_{k=0}^{n} a_k\, k\, \theta^{k-1}\, \delta_K(\theta) \\
&= \big(D_0 f\big)(\theta) + \big(D_1 f\big)(\theta)\cdot\delta_K(\theta)
\end{aligned}$$

Es sei nun $\theta \in K$ fest, und $h(x)$ sei das Minimalpolynom von θ über F. Dann ist $h(x)$ normiert, irreduzibel und hat die einfache Nullstelle θ. Somit ist $(D_1 h)(\theta) \neq 0$, denn $(D_1 h)(x)$ hat kleineren Grad als $h(x)$. Nach den Ableitungsregeln gilt $\delta_K(0) = 0$. Also haben wir

$$0 = \delta_K(0) = \delta_K\big(h(\theta)\big) = \big(D_0 h\big)(\theta) + \big(D_1 h\big)(\theta)\cdot\delta_K(\theta)$$

Wegen $(D_1 h)(\theta) \neq 0$ kann diese Gleichung nach $\delta_K(\theta)$ aufgelöst werden; es gilt offenbar

$$\delta_K(\theta) = -\frac{(D_0 h)(\theta)}{(D_1 h)(\theta)}$$

Nun war aber $\theta \in K$ beliebig; also ist die Ableitung δ_K eindeutig, sofern sie überhaupt existiert.

Nun zur *Existenz* von δ_K: Weil F die Charakteristik 0 hat, ist K ein einfacher Erweiterungskörper, d.h. es gibt ein Element $\theta \in K$ derart, dass $K = F(\theta)$ (vgl. [A], Folgerungen zu den Sätzen 24 und 25). Für dieses Element θ betrachten wir nun die Abbildung ρ: $F[x] \rightarrow F(\theta)$, welche gegeben ist durch $\rho(f(x)) = f(\theta)$. Es handelt sich dabei um einen surjektiven Ring-Homomorphismus. Der Kern von ρ ist das vom Minimalpolynom $h(x)$ von θ erzeugte Hauptideal von $F[x]$, m.a.W. $\mathrm{Ker}(\rho) = (h(x))$. Nach Definition von D_1 hat $(D_1 h)(x)$ einen kleineren Grad als $h(x)$. Folglich muss $(D_1 h)(\theta) \neq 0$ sein. Somit kann in $F(\theta)$ der Quotient $\chi := -(D_0 h)(\theta)/(D_1 h)(\theta)$ gebildet werden. Nun ist aber ρ surjektiv, also gibt es ein Polynom $p(x)$ mit $\rho(p(x)) = p(\theta) = \chi$. Dieses Polynom $p(x)$ wird nun für die Definition einer Selbstabbildung D: $F[x] \rightarrow F[x]$ verwendet. Diese ist gegeben durch

$$f(x) \in F[x] \mapsto (Df)(x) = (D_0 f)(x) + p(x) \cdot (D_1 f)(x).$$

Für diese Abbildung D gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}(D(f+g))(x) &= (D_0(f+g))(x) + p(x) \cdot (D_1(f+g))(x) \\ &= (D_0 f)(x) + p(x) \cdot (D_1 f)(x) + (D_0 g)(x) + p(x) \cdot (D_1 g)(x) \qquad \textbf{(1)} \\ &= (Df)(x) + (Dg)(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(D(fg))(x) &= (D_0(fg))(x) + p(x)(D_1(fg))(x) \\ &= (D_0 f)(x)g(x) + f(x)(D_0 g)(x) + \\ &\quad + p(x)\left[(D_1 f)(x)g(x) + f(x)(D_1 g)(x)\right] \\ &= \left[(D_0 f)(x)g(x) + p(x)(D_1 f)(x)g(x)\right] \qquad \textbf{(2)} \\ &\quad + \left[f(x)(D_0 g)(x) + p(x)f(x)(D_1 g)(x)\right] \\ &= (Df)(x)g(x) + f(x)(Dg)(x)\end{aligned}$$

Also hat D die formalen Eigenschaften einer Ableitung. Zudem gilt für $a \in F$

$$\begin{aligned} Da &= D_0 a + p(x) D_1 a \\ &= \delta_F(a) + p(x)\cdot 0 \qquad \textbf{(3)} \\ &= \delta_F(a) \end{aligned}$$

Nach der Definition von D und χ gilt ferner

$$\begin{aligned} (Dh)(\theta) &= (D_0 h)(\theta) + p(\theta)(D_1 h)(\theta) \\ &= (D_0 h)(\theta) + \chi(D_1 h)(\theta) \qquad \textbf{(4)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dies bedeutet aber gerade, dass $(Dh)(x)$ im Kern von ρ ist. Da $\mathrm{Ker}(\rho)$ das vom Minimalpolynom $h(x)$ erzeugte Ideal ist, bildet D den ganzen Kern in sich ab. Damit können wir nun durch $\delta(f(\theta)) := (Df)(\theta)$ eine (vom Repräsentanten $f(x)$ unabhängige) Selbstabbildung von $F(\theta)$ definieren. Wegen (**1**) und (**2**) ist δ eine Ableitung, und (**3**) besagt, dass δ die auf F definierte Ableitung δ_F auf $F(\theta)$ fortsetzt. Damit ist der Beweis der Proposition vollständig. $\square$

Wir illustieren den obigen Existenzbeweis durch das nachstehende kommutative Diagramm (mit exakten Zeilen). Dabei bedeutet ι: $\mathrm{Ker}\,\rho \to F[x]$ die Inklusionsabbildung.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\rho \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "D"] & F[x] \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "D"] & F(\theta) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\rho \arrow[r, "\iota"] & F[x] \arrow[r, "\rho"] & F(\theta) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Anhang B: Beweis des Theorems

Wir beweisen hier das Theorem von S. 8, d.h. das Prinzip von Liouville in der modernen differential-algebraischen Fassung von Risch und Rosenlicht.

Beweis: Nach Voraussetzung ist F ein Differentialkörper der Charakteristik 0 mit Konstantenkörper F_0, und G ist ein elementarer Erweiterungskörper von F mit demselben Konstantenkörper: $G_0 = F_0$. Wir nehmen an, es gebe Elemente $f \in F$ und $g \in G$ derart, dass $\delta(g) = f$ ist.

Nach Definition ist G von der Form $G = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, wobei das Element θ_{k+1} über dem Zwischenkörper $F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ algebraisch, exponentiell oder logarithmisch ist. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion. Der Fall $N = 0$ ist trivial. Für $N > 0$ nehmen wir an, der Satz sei schon bewiesen für elementare Erweiterungen mit $N-1$ Elementen, und wenden ihn an auf die Erweiterung $F(\theta_1) \subset F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$.

Somit gilt

$$f = \delta(u_0) + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\delta(u_k)}{u_k}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ aus F_0 und Elementen $u_0, u_1, \ldots, u_n$ von $F(\theta_1)$. Wir haben zu zeigen, dass f eine analoge Darstellung besitzt mit $u_0, u_1, \ldots, u_n \in F$ (und möglicherweise verschiedenem n). Zur Abkürzung setzen wir $\theta = \theta_1$ und verfolgen zuerst den Fall, da θ algebraisch ist über F.

Fall I: θ ist algebraisch über F. Unter dieser Annahme gibt es Polynome $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x) \in F[x]$ mit $p_1(\theta) = u_1, p_2(\theta) = u_2, \ldots, p_n(\theta) = u_n$. Es sei nun $p(x)$ das Minimalpolynom von θ über F, und $\overline{F}$ sei der Zerfällungskörper von $p(x)$ über F. Ferner seien $\vartheta_1 = \theta, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_s$ die Nullstellen von $p(x)$ in $\overline{F}$. Da F nach Voraussetzung die Charakteristik 0 besitzt, ist $p(x)$ separabel, d.h. $p(x)$ besitzt nur einfache Nullstellen. Nach [A, Satz 8] gibt es nun zu jedem Index k mit $1 \le k \le s$ einen Automorphismus σ_k von $\overline{F}$, welcher F fest lässt und ϑ_1 in ϑ_k abbildet.

Nach der Proposition von Anhang A lässt sich die Ableitung δ_F von F auf genau eine Weise zu einer Ableitung δ auf $\overline{F}$ fortsetzen. Analog zum Beweis der Proposition finden wir, dass für diese Ableitung die Beziehung

$$\delta\big(f(\tau)\big) = \big(D_0 f\big)(\tau) + \big(D_1 f\big)(\tau)\cdot\delta(\tau)$$

gilt; dabei sind $\tau \in \overline{F}$ und $f(x) \in F[x]$ beliebig. Für die Definition der Abbildungen D_0 und D_1 siehe S. 20. Insbesondere haben wir dann

$$\big(D_0\, p\big)(\vartheta_k) + \big(D_1\, p\big)(\vartheta_k)\cdot\delta(\vartheta_k) = \delta\big(p(\vartheta_k)\big) = 0, \quad 1 \le k \le s \quad \mathbf{(1)}$$

Wegen $\sigma_k\big((D_i\, p)(\vartheta_1)\big) = (D_i\, p)(\vartheta_k)$ für $i = 0, 1$ und $1 \le k \le s$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
&\big(D_0\, p\big)(\vartheta_k) + \big(D_1\, p\big)(\vartheta_k)\cdot\sigma_k\circ\delta(\vartheta_1) = \\
&= \sigma_k\big((D_0\, p)(\vartheta_1)\big) + \sigma_k\big((D_1\, p)(\vartheta_1)\big)\cdot\sigma_k\circ\delta(\vartheta_1) \qquad \mathbf{(2)} \\
&= \sigma_k\big((D_0\, p)(\vartheta_1) + (D_1\, p)(\vartheta_1)\cdot\delta(\vartheta_1)\big) = \delta\big(p(\vartheta_k)\big) = 0
\end{aligned}$$

für $1 \le k \le s$. Wir erinnern uns, dass p irreduzibel ist, $D_1\, p$ aber kleineren Grad hat als p, also $\big(D_1\, p\big)(\vartheta_k) \neq 0$ ist. Aus dem Vergleich von $\mathbf{(1)}$ und $\mathbf{(2)}$ resultiert somit die Beziehung $\sigma_k\circ\delta(\vartheta_1) = \delta(\vartheta_k)$, $1 \le k \le s$. Allgemeiner gilt $\sigma_k\circ\delta(h(\vartheta_1)) = \delta\,(h(\vartheta_k))$ für jedes Polynom $h(x) \in F[x]$ und $1 \le k \le s$. Denn ist $h(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$, so haben wir

$$\begin{aligned}
\sigma_k\circ\delta(h(\vartheta_1)) &= \sigma_k\circ\delta\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\,\vartheta_1^j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m}\Big(\delta(a_j)\,\sigma_k(\vartheta_1^j) + a_j\,\sigma_k\circ\delta\,(\vartheta_1^j)\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{m}\delta(a_j)\,\vartheta_k^j + \sum_{j=0}^{m} j\,a_j\,\sigma_k(\vartheta_1^{j-1})\,\sigma_k\circ\delta\,(\vartheta_1) \\
&= \sum_{j=0}^{m}\delta(a_j)\,\vartheta_k^j + \sum_{j=0}^{m} j\,a_j\,\vartheta_k^{j-1}\,\delta(\vartheta_k) \\
&= \delta\,(h(\vartheta_k))
\end{aligned}$$

Folglich gilt für jedes k

$$f = \sigma_k(f) = \sigma_k\left(\delta(u_0) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta(u_j)}{u_j}\right)$$

$$= \sigma_k\left(\delta(p_0(\vartheta_1)) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta(p_j(\vartheta_1))}{p_j(\vartheta_1)}\right)$$

$$= \delta(p_0(\vartheta_k)) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta(p_j(\vartheta_k))}{p_j(\vartheta_k)}$$

Darauf wenden wir den Operator $\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}$ an:

$$f = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} f = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} \delta(p_0(\vartheta_k)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{s} \sum_{k=1}^{s} \frac{\delta(p_j(\vartheta_k))}{p_j(\vartheta_k)}$$

$$= \frac{1}{s}\,\delta(\sum_{k=1}^{s} p_0(\vartheta_k)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{s} \frac{\delta(p_j(\vartheta_1)\cdot p_j(\vartheta_2)\cdots p_j(\vartheta_s))}{p_j(\vartheta_1)\cdot p_j(\vartheta_2)\cdots p_j(\vartheta_s)}$$

Man beachte nun, dass jeder Automorphismus von $\overline{F}$, welcher F fest lässt, die Nullstellen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_s$ von $p(x)$ permutiert. Folglich lässt jeder solche Automorphismus die Elemente $\tilde{u}_0 = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} p_0(\vartheta_k)$ und $\tilde{u}_j = p_j(\vartheta_1)\cdot p_j(\vartheta_2)\cdots p_j(\vartheta_s)$, $1 \le j \le n$ fest. Nach [A, Satz 18] müssen diese Elemente somit schon in F liegen. Also besitzt f eine Darstellung der Form $f = \delta(\tilde{u}_0) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \cdot \delta(\tilde{u}_j)/\tilde{u}_j$ mit $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n \in F_0$ und $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n \in F$. Dies beweist den Induktionsschritt im Fall I.

Fall II: θ ist transzendent über F. In diesem Fall gehen wir ähnlich vor wie in Abschnitt V. Wir erinnern an die Induktionsannahme. Nach dieser kann f geschrieben werden als

$$f = \delta(u_0) + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\delta(u_k)}{u_k} \quad (*)$$

mit Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ aus F_0 und Elementen $u_0, u_1, \ldots, u_n$ von $F(\theta)$.

Jede Funktion $u \in F(\theta)$ besitzt eine Darstellung der Form

$$u = a\,\frac{p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{\alpha_r}}{q_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot q_s^{\beta_s}},$$

und für ihre logarithmische Ableitung gilt:

$$\frac{\delta(u)}{u} = \frac{\delta(a)}{a} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \frac{\delta(p_i)}{p_i} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \frac{\delta(q_j)}{q_j}.$$

Dabei ist $a \in F$, die Exponenten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ sind positive ganze Zahlen, und bei den $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s$ handelt es sich um normierte, irreduzible Polynome aus $F[\theta]$.

Wir dürfen annehmen, dass die obige Quotientendarstellung gekürzt ist; also sind die Mengen $\{p_1, \ldots, p_r\}$ und $\{q_1, \ldots, q_s\}$ disjunkt.

Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass die Elemente $u_1, \ldots, u_n$ in der Darstellung (*) als Elemente von F oder als normierte, irreduzible Polynome aufgefasst werden können. Ferner dürfen wir annehmen, dass $c_k \neq 0$ für jedes k mit $1 \leq k \leq n$ und dass $u_j \neq u_k$ sofern $j \neq k$.

Als nächstes betrachten wir die Partialbruchzerlegung von u_0. Es gilt

$$u_0 = \tilde{u}_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{g_{kj}}{f_k^j} \qquad (**)$$

mit $\tilde{u}_0, f_k, g_{kj} \in F[\theta]$, wobei f_k normiert und irreduzibel ist und $\operatorname{Grad} g_{kj} < \operatorname{Grad} f_k$, dies für alle j, k mit $1 \leq j \leq n_k$ und $1 \leq k \leq n$. Ableiten von (**) liefert

$$\begin{aligned} \delta(u_0) &= \delta(\tilde{u}_0) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\delta(g_{kj}) f_k^j - g_{kj}\, j\, f_k^{j-1} \delta(f_k)}{f_k^{2j}} \\ &= \delta(\tilde{u}_0) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\delta(g_{kj}) f_k - j\, g_{kj}\, \delta(f_k)}{f_k^{j+1}} \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun die Fälle IIa und IIb; im Fall IIa ist θ logarithmisch, im Fall IIb ist θ exponentiell über F.

Fall IIa: Es sei also θ logarithmisch über F, d.h. es gibt ein Element $a \in F$ derart, dass $\delta(\theta) = \delta(a)/a$. Es sei ferner $h \in F[\theta]$ ein normiertes irreduzibles Polynom. Nach Lemma 2 (2) (S. 11) ist dann $\delta(h) \in F[\theta]$ und $\operatorname{Grad} \delta(h) = \operatorname{Grad} h - 1$. Da h irreduzibel ist, muss somit $\operatorname{ggT}(h, \delta(h)) = 1$ sein. In der Darstellung (*) erscheinen folglich alle Quotienten $\delta(u_j)/u_j$ in gekürzter Form.

Es sei nun h eines der Polynome f_k in der Darstellung (**). D.h. u_0 enthält einen Summanden der Form $\sum_{k=1}^{r} g_k/h^k$ mit $\operatorname{Grad} g_k < \operatorname{Grad} h$ für $1 \leq k \leq r$, während in der Zerlegung von $u_0 - \sum_{k=1}^{r} g_k/h^k$ kein Term mit h im Nenner vorkommt. Nun gilt

$$\delta\left(\sum_{k=1}^{r} \frac{g_k}{h^k}\right) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\delta(g_k)h - k g_k \delta(h)}{h^{k+1}}.$$

Insbesondere enthält die Partialbruchzerlegung von $\delta(u_0)$ den Summanden

$$\sigma = -\frac{r g_r \delta(h)}{h^{r+1}}.$$

Da h irreduzibel ist und da sowohl g_r als auch $\delta(h)$ kleineren Grad haben als h, liegt σ in gekürzter Darstellung vor.

Wir betrachten wieder die Darstellung (*) von f. Die Partialbruchzerlegung der rechten Seite enthält den Summanden σ, während f zu F gehört. Dies ist unmöglich, also kann h nicht als eines der Polynome f_k in der Darstellung (**) vorkommen. Da h ein beliebiges irreduzibles Polynom war, folgt, dass u_0 in Wirklichkeit ein Polynom ist. Also reduziert sich die Formel (**) auf $u_0 = \tilde{u}_0$. Dann können aber auch die Nenner u_j keine irreduziblen Polynome sein. Also müssen sämtliche u_j schon in F sein. Dann ist aber auch $\delta(u_0) \in F$, und Teil (2) von Lemma 2 impliziert, dass u_0 von der Gestalt $u_0 = c\theta + d$ sein muss mit $c \in F_0$ und $d \in F$. Folglich gilt

$$f = \delta(u_0) + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\delta(u_k)}{u_k} = c\frac{\delta(a)}{a} + \delta(d) + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\delta(u_k)}{u_k},$$

und f hat die gewünschte Form.

Fall IIb: θ ist exponentiell über F, d.h. es gibt ein Element $b \in F$ mit $\delta(\theta)/\theta = \delta(b)$. Es sei nun $h \in F[\theta]$ wieder ein normiertes irreduzibles Polynom, diesmal mit $h \neq \theta$. Nach Lemma 3 ist dann auch $\delta(h) \in F[\theta]$, aber h ist kein Teiler von $\delta(h)$. Ist somit in der Darstellung (*) ein Element u_k von dieser Art, so erscheint der Quotient $\delta(u_k)/u_k$ in gekürzter Form. Dieselbe Überlegung wie im Fall IIa zeigt andererseits, dass ein solches h nicht als eines der Polynome f_k in der Darstellung (**) vorkommen kann. Also ist u_0 ein verallgemeinertes Polynom $u_0 = \sum_{j=-l}^{m} a_j \theta^j$ mit $a_j \in F$, $l \in \mathbf{N}$. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (*) müssen dann aber auch die u_k schon in F sein mit Ausnahme – vielleicht – von θ selber. Wegen $\delta(\theta)/\theta = \delta(b) \in F$ ist dann aber jeder Summand $c_k \cdot \delta(u_k)/u_k$ in F. Dann gilt aber auch $\delta(u_0) \in F$. Folglich muss $l = 0$ sein, d.h u_0

ist ein Polynom in θ. Nach Lemma 3 (1) hat u_0 denselben Grad wie $\delta(u_0)$; also ist auch $u_0 \in F$.

Falls θ unter den u_k nicht vorkommt, ist die gewünschte Darstellung gefunden. Andernfalls gilt o.B.d.A.

$$\begin{aligned} f &= \delta(u_0) + c_1 \frac{\delta(\theta)}{\theta} + \sum_{j=2}^{n} c_j \frac{\delta(u_j)}{u_j} \\ &= \delta(c_1 b + u_0) + \sum_{j=2}^{n} c_j \frac{\delta(u_j)}{u_j} \end{aligned}$$

mit $c_1 b + u_0, u_1, \ldots, u_n \in F$. Damit ist der Beweis des Theorems vollständig. □

Literatur

[A] Artin, E.: *Galoissche Theorie*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959. Nachdruck: Verlag Harri Deutsch, Thun 1988

[B] Bronstein, M.: *Symbolic Integration I. Transcendental Functions*. Algorithms and Computation Vol. I, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1996

[GCL] Geddes, K.O., Czapor, S.R., Labahn, G.: *Algorithms for Computer Algebra*. Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London 1992

[Ka] Kaplansky, I.: *An introduction to differential algebra*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago V, Hermann, Paris 1957

[Ko] Kolchin, E.R.: Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations. Ann. of Math. 49 (1948), 1–42

[L] Liouville, J.: Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique. J. Ecole Polytech. 14 (1833), 124–193

[O] Ostrowski, A.: Sur l'intégrabilité élémentaire de quelques classes d'expressions. Comment. Math. Helv. 18 (1946), 283–308

[R1] Risch, R.: The problem of integration in finite terms. Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 167–189

[R2] Risch, R.: The solution of the problem of integration in finite terms. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 605–608

[Ri1] Ritt, J.F.: *Integration in finite terms*. Columbia University Press, New York 1948

[Ri2] Ritt, J.F.: *Differential Algebra*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 33 (1950)

[Ro1] Rosenlicht, M.: Liouville's theorem on functions with elementary integrals. Pacific J. Math. 24 (1968), 153–161

[Ro2] Rosenlicht, M.: Integration in finite terms. Amer. Math. Monthly 79 (1972), 963–972

Prof. U. Kirchgraber
Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89–01	H. Walser	Fraktale
89–02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89–03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89–04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90–01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90–02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
90–03	U. Kirchgraber	Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II
91–01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91–02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91–03	M. Federer	Preistheorie
91–04	M. Gauglhofer	Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen
92–01	U. Kirchgraber	Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen
93–01	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Annäherung an den Goldenen Schnitt
93–01(I)	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Approccio alla Sezione Aurea
93–02	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Perspektive und Axonometrie
93–02(I)	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Prospettiva e Assonometria
93–03	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Verzweigungsphänomene
93–03(I)	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Fenomeni di Biforcazione
93–04	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Der Fallschirmspringer
93–04(I)	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Il Paracadutista
93–05	H.R. Schneebeli	Alles fliesst – Mit dem Graphikrechner zu den Quellen der Analysis
93–06	H. Biner	Kongruenzabbildungen und Symmetrien im Euklidischen Raum
93–07	U. Kirchgraber	Hundert Jahre Störungstheorie – Differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev
94–01	U. Maurer	Kryptologie: Mathematik zwischen Anwendung und Ästhetik
94–02	H. Klemenz	Computergestützte Raumgeometrie
94–03	F. Barth	Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt - Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit
94–04	W. Henn	Auto und Verkehr – Beispiele aus der Analysis zum realitätsnahen Mathematikunterricht
95–01	N. Sigrist	Auf der Kippe

95–02	U.Kirchgraber	Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten.
	U. Kirchgraber, N. Sigrist	Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze
95–03	A. Gächter	Infinitesimalgeometrie - am Beispiel der Kreisevolvente
95–04	P. Gallin	Grund- und Aufrissmethode in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
95–05	P. Bolli	The unreasonable effectiveness of mathematics
95–06	G. Schierscher	Verfolgungsprobleme
96–01	W. Burgherr	Schwimmende Prismen mit Schlagseite
96–02	M. Struwe	Sattelpunkte oder Variationsprinzipien in Geometrie und Mechanik
96–03	M. Huber	Warum denn ist $\exp(x^2)$ nicht elementar integrierbar?