ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Berichte über Mathematik und Unterricht
Herausgeber: U. Kirchgraber

Analysis

mit dem Computer-Algebra-System des TI-92

Beat Eicke und Edmund Holzherr
5. Mai 1997

INHALT

Vorwort

Ein graphikfähiger Taschenrechner mit einem Computer-Algebra-System (CAS) ist eine Herausforderung und Chance, um Mathematik und Mathematikunterricht am Gymnasium von Grund auf neu zu überdenken. Bald werden alle SchülerInnen permanent über ein CAS verfügen. Dadurch kann manches realisiert werden, das bisher kaum oder nur mit erheblichem Aufwand möglich war.

Wir stellten uns deshalb die Aufgabe, einen Analysisunterricht mit konsequentem Einsatz des TI-92 zu entwerfen. Wir wollten anhand eines konkreten Themas einerseits aufzeigen, wie die Möglichkeiten des TI-92 genutzt werden können. Andererseits wollten wir andeuten, welches Wissen und welche algebraischen Fertigkeiten für die SchülerInnen auch in Zukunft unverzichtbar sein werden, und was früher oder später einmal kaum noch einen grossen Stellenwert haben dürfte. Eine abschliessende Antwort auf die Frage „Wie viele Termumformungen braucht der Mensch im Zeitalter von CAS ?" ist zum jetzigen Zeitpunkt aber sicher noch nicht möglich.

Wir wollten und konnten kein neues didaktisches Konzept des Analysisunterrichts entwickeln. Diese äusserst anspruchsvolle Aufgabe bedarf begnadeter MathematiklehrerInnen und der sorgfältigen Evaluation von mehrjährigen und breit abgestützen Erfahrungen mit dem neuen Werkzeug.
Die Bedeutung des CAS für die Mathematik kann man aber nur abschätzen, wenn man ein grösseres Teilgebiet betrachtet. Wir haben uns daher für einen denkbaren Aufbau der Analysis entschieden, um die Möglichkeiten des TI-92 und die Auswirkungen der steten Verfügbarkeit des CAS im Unterricht deutlich zu machen. Andernfalls wäre nur eine Aneinanderreihung von Einzelproblemen entstanden, die keinen Überblick erlaubt hätte. Aus dem gleichen Grund verzichteten wir bewusst auf die Entwicklung ausgefeilter Unterrichtssequenzen für besonders heikle didaktische Probleme. Sie hätte unsere Zielsetzung nur unnötig stark belastet.

Wir hoffen, dass unsere Arbeit viele Kolleginnen und Kollegen dazu anregt, über den Einsatz von CAS - und damit auch über ihren Unterricht - nachzudenken.

Dank

Unsere Arbeit entstand während eines Gastaufenthaltes an der ETH Zürich im Rahmen des Programms „ETH für die Schule". Wir danken Herrn Prof. Dr. Urs Kirchgraber für die Einladung und für die engagierte Begleitung. Seine Ratschläge waren für uns oft wertvoll. Zu Dank verpflichtet sind wir auch Herrn Dr. Werner Hartmann, der uns bei der Planung des Projekts behilflich war und Herrn Otto M. Keiser für die Durchsicht unseres Skriptes.
Danken möchten wir zudem

- Herrn Heiko Knechtel aus Bückedorf (D), der uns einen umfassenden Einblick in die Schulversuche des Landes Niedersachsen gewährte und uns während des Besuches sehr angenehm betreute;
- Herrn Dr. René Hugelshofer, der uns zu einem Schulbesuch empfing;
- Herrn Pierre Bula von Texas Instruments, der uns während mehrere Wochen einen Klassensatz von TI-92 leihweise zur Verfügung stellte;
- Frau Lenda Hill vom TI Calculator Team für die Stellungsnahmen zu den meisten der eingereichten Probleme

sowie allen Kollegen, die uns in irgendeiner Art und Weise unterstützt haben.

TI-92 - Notationen

Wir haben folgende Notationen bei Berechnungen mit dem TI-92 verwendet:

→ oder auch ->	bedeutet, dass die Taste STO▸ zu drücken ist
⇒	Nach einem Doppelpfeil folgt stets ein Resultat des TI-92.

Aufgaben

Wir haben keine Sammlung mit neuen oder gar revolutionären Aufgaben herausgeben wollen. Trotzdem haben wir ab und zu einige Vorschläge eingetreut, um zu zeigen, welche Aufgabentypen (nach wie vor) verwendet werden könnten, weil sie durch den Einsatz des CAS nicht völlig trivialisiert werden, sondern durchaus noch einige mathematische Kenntnisse voraussetzen.

Voraussetzungen

Die folgenden mathematischen Grundlagen werden vorausgesetzt:

- Folgen und Reihen
- Rekursive Folge
- Heuristischer Grenzwertbegriff

1. Modell-Realität

1.1 Wozu ?

Ich behaupte sogar, dass in jeder besonderen Naturlehre nur soviel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.

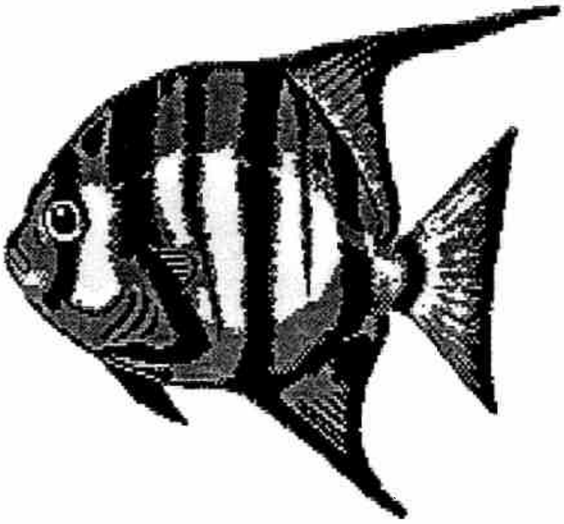
Immanuel Kant
"Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft"

Wie kann die Behauptung eines der grössten Philosophen aus heutiger Sicht verstanden werden?
Bei der Beobachtung von vielen Vorgängen in der Natur, der Medizin, der Wirtschaft, der Technik und der Gesellschaft können Gesetzmässigkeiten erkannt werden. Die Grössen, die den Zustand eines Vorgangs beschreiben, verändern sich mit der Zeit. Einen solchen Vorgang nennt man einen *Prozess*.

Dazu einige Beispiele:
- Bewegungen im Schwerefeld der Erde
- Abbau von Medikamenten im Körper
- Wachstum von Bakterienkulturen
- Verbreitung von Informationen usw.

Durch Vereinfachungen und sinnvolle Annahmen über die Veränderung der Zustandsgrösse eines Prozesses in einem sehr kleinen Zeitintervall erhält man mit Hilfe der Differentialrechnung oft brauchbare bis sehr gute Modelle für den realen Vorgang. Mit solchen Modellen kann ein Menschheitstraum verwirklicht werden: ***man kann die Zukunft prognostizieren!***

Mit der Untersuchung von einfachen Modellen, die für Schülerprojekte besonders gut variiert oder ausgebaut werden können, wollen wir eine Motivation für den Einstieg in die Differentialrechnung geben.



Meerwasser-Aquarium

In ein Meerwasseraquarium (erwünschter Salzgehalt ca. 3.5%) wurde versehentlich Wasser mit einem Salzgehalt von q% eingefüllt. Das Missgeschick kann auf verschiedene Arten, die zudem von der Ausgangssituation abhängen, korrigiert werden.

1. Nachsalzen

Es wurde versehentlich Süsswasser ($q=0$) eingefüllt. Der Fehler wird korrigiert, indem man nun während einer gewissen Zeit Meerwasser einleitet und gleichzeitig die gleiche Menge Aquariumwasser durch den Überlauf ableitet. Wie wächst die Salzmenge im Aquarium ?

2. Entleeren

Nachdem man den Fehler bemerkt hat, wird das Aquarium durch einen Abfluss im Boden des Aquariums entleert, um danach das Aquarium mit Meerwasser wieder aufzufüllen. Wie lange dauert es, bis das Aquarium zur Hälfte bzw. völlig entleert ist ?

Alternativen: *Variation der geometrischen Form des Gefässes.*
a) Trichter b) Liegendes Dreiecksprisma c) Liegende Dreieckspyramide usw.

3. Salzen - Entleeren

Man bemerkt den Fehler, nachdem das Aquarium zu einem Drittel gefüllt ist. Um nun das Missgeschick zu korrigieren, öffnet man den Ablauf und leitet gleichzeitig z ℓ Salzwasser pro Sekunde mit einem Salzgehalt von p% in das Aquarium. Wie verändert sich das Wasservolumen und die Salzmenge im Aquarium ?

Speziallfälle

- $z = 0$ *d. h.. kein Zufluss* — *Entleeren*
- $z =$ *Abfluss und* $q = 0$ — *einfaches Nachsalzen: Wachstumsprozess*
- $z =$ *Abfluss und* $p = 0$ — *einfaches Entsalzen: Zerfallsprozess*

- *Durch den Ablauf werden konstant a ℓ Aquariumwasser pro Sekunde abgepumpt (abgelassen).*

a)	$a < z$ *und* $p < q$	*Entsalzen und Füllen des Aquariums*
b)	$a < z$ *und* $p > q$	*Nachsalzen und Füllen des Aquariums*
c)	*Inhaltliche Variation*	*Forellenteich in 4.1.2*
d)	$a = z$ *und* $q = 0$	*einfaches Nachsalzen: Wachstumsprozess*
e)	$a = z$ *und* $p = 0$	*einfaches Entsalzen: Zerfallsprozess*

1.2 Modelle

1.2.1 Nachsalzen

MODELLIERUNG:
Das Aquarium enthält $V_o = 2700\ \ell$ Süsswasser. Pro Minute fliessen $z = 18$ kg der Salzlösung mit einem Salzgehalt von $p\% = 3.5\ \%$ in das Aquarium. Durch den Überlauf fliesst die gleich Menge Aquariumwasser ab.

Modellannahmen:
- Die Einleitung des Wassers garantiert, dass die Salzkonzentration im Aquarium stets homogen ist, d. h. in jeder Volumeneinheit ist jeweils gleich viel Salz enthalten.
- In einem kleinen Zeitintervall wird zuerst das Wasser aus dem Aquarium abgeschöpft und danach wird das Aquarium wieder mit der gleichen Menge Meerwasser aufgefüllt.
- 1 kg Wasser bzw. Salzlösung ist gleich $1\ \ell$ Wasser bzw. Salzlösung.

Mit $S(t)$ bezeichnen wir die Salzmenge in kg, die im Aquarium zum Zeitpunkt t (min) vorhanden ist. S ist also die Funktion, die in jedem Zeitpunkt t angibt, wieviel Salz im Aquariumwasser vorhanden ist.

Auftrag: Untersuche die Salzmenge im Aquarium.

Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion S abgeleitet werden.

Eigenschaften von S :
- $S(0) = 0$
- S ist eine *streng monoton wachsende* Funktion
- Definitionsbereich $\mathbb{D}:\ t \geq 0$
- Vermutung: S wird immer langsamer zunehmen
- $S(t) \geq 0$
- $S(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{p}{100} \cdot V_o = 94.5$
- Wertebereich $\mathbb{W}:\ 0 \leq S(t) < 94.5$

Aufgrund dieser Eigenschaften kann der Graph der Funktion S skizziert werden.

Manuelle Näherungen :
Die Zeit unterteilen wir in kleine, gleichlange Intervalle.

Zeitintervall[1]: 2 Minuten
In je 2 Minuten werden $18 \cdot 2\ dm^3 = 36\ dm^3$ Aquariumwasser abgeschöpft und durch die gleiche Menge Meerwasser ersetzt.

1. Zeitintervall $[0, 2]$

Salzverlust :	0	Salzzuwachs:	$z \cdot \frac{p}{100} \cdot 2 = 1.26$
Salzmenge nach 2 Minuten:	$S(2) = 0 + 1.26 = 1.26$		

2. Zeitintervall $[2, 4]$

Salzverlust :	$z \cdot \frac{S(2)}{V_o} \cdot 2 = 0.0168$	Salzzuwachs:	$z \cdot \frac{p}{100} \cdot 2 = 1.26$
Salzmenge nach 4 Minuten:	$S(4) = 1.26 - 0.0168 + 1.26 = 2.5032$		

3. Zeitintervall $[4, 6]$

Salzverlust :	$z \cdot \frac{S(4)}{V_o} \cdot 2 = 0.033376$	Salzzuwachs:	$z \cdot \frac{p}{100} \cdot 2 = 1.26$
Salzmenge nach 6 Minuten:	$S(6) = 2.5032 - 0.033376 + 1.26 = 3.72982$		

usw.

Der Rechenaufwand für eine brauchbare manuelle Approximation mit einer kleinen Zeitintervallänge Δt ist im allgemeinen riesig gross. Der Computer kann uns diese Arbeit abnehmen. Dazu verallgemeinern wir zuerst unsere Näherungsmethode.

[1]Bemerkung: Die Wahl eines Zeitintervalls mit der Länge 1 kann den math. Zusammenhang verdecken.

Allgemeine Approximation:
Wir betrachten den Zuwachs der Salzmenge in einem sehr kleinen Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$:

Salzmenge zum Zeitpunkt 0: $S(0) = 0$

Salzverlust im Intervall $[t, t+\Delta t]$: $\approx z \cdot \frac{S(t)}{V_0} \Delta t = S(t) \cdot \frac{1}{150} \cdot \Delta t$

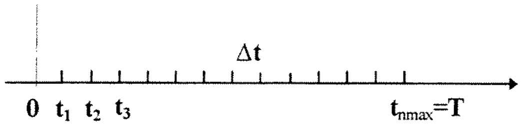
Salzzuwachs im Interrvall $[t, t+\Delta t]$: $z \cdot \frac{p}{100} \cdot \Delta t = 0.63 \cdot \Delta t$

Salzmenge zum Zeitpunkt $t+\Delta t$:	$S(t+\Delta t) \approx S(t) - S(t) \frac{1}{150} \Delta t + 0.63 \cdot \Delta t$

(1)

Approximation mit dem Computer

Wir wollen nun herausfinden, wann der Salzgehalt im Aquarium auf 2% gestiegen ist. Dazu unterteilen wir das Zeitintervall von 0 bis z. B. T = 600 min in nmax = 1000 gleichlange Intervalle.
Von $S(t_0) = S(0) = 0$ ausgehend, approximieren wir schrittweise den Funktionswert von S jeweils an der nächstfolgenden Stelle. Lösung ist der Wert von t, bei dem $S(t)$ möglichst nahe bei $0.02 \cdot 2700 = 54$ liegt.



Aus der Gleichung (1) für $t = t_{n-1}$ und $t+\Delta t = t_n$ folgt:
$S(t_n) \approx S(t_{n-1}) \cdot (1 - \frac{1}{150} \cdot \Delta t) + .63 \cdot \Delta t$

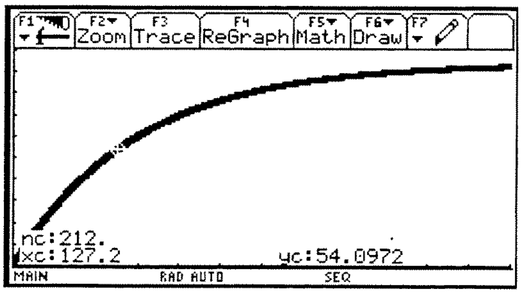
nmax = 1000 $\Rightarrow$ $\Delta t = T / nmax = .6$ und
$t_n = n \cdot \Delta t = T \cdot n / nmax = .6 \cdot n$ mit $n = 0,1,...,1000$

Einstellung : [MODE] Graph........ FUNCTION-> 4: SEQUENCE

◆ [Y=]

u1 (n) = .6*n	(Zeit: t_n)
ui1 = 0	(Zeit: t_0)
u2(n) = u2(n-1)*(1-.6/150)+ .63* .6	(Salzmenge: $S(t_n)$)
ui2 = 0	(Salzmenge: $S(t_0)$)

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1 (Zeit: t_n)
Y Axis: u2 (Salzmenge: $S(t_n)$)



◆ [WINDOW]

nmin = 0	nmax=1000	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=600	(Bereich der Zeit t)
ymin=0	ymax=100	(Bereich der Funktion S)
xscl = 50	yscl =10	(Unterteilung der Achsen)

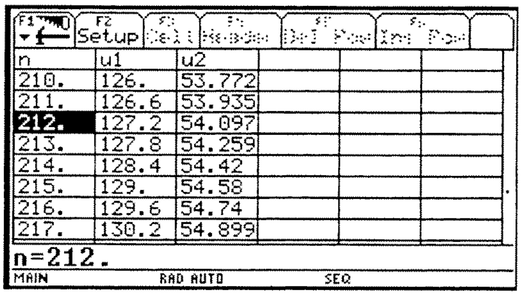
◆ [GRAPH] [F 3] Trace: ▷▷▷

Resultat: Nach nc=212 Zeiteinheiten, d. h. nach xc=127.2 Minuten, ist der Salzgehalt im Aquarium auf ca. 2% angestiegen.

Alternative:

◆ [TblSet] tblStart: 210 (Startnummer) Δtbl : 1 (Schrittweite)

◆ [TABLE]



n	u1	u2
210.	126.	53.772
211.	126.6	53.935
212.	127.2	54.097
213.	127.8	54.259
214.	128.4	54.42
215.	129.	54.58
216.	129.6	54.74
217.	130.2	54.899

n=212.

Aufgaben
Genauigkeit: Untersuche die Näherungslösung für nmax= 1500, 2000, 3000. Welche Schlüsse kann man aus den Ergebnissen ziehen ?

Differentialgleichung

Solange ein Modell nur durch eine Differenzengleichung dargestellt wird, hängt die Beschreibung der Lösung von einer willkürlichen Unterteilung des Zeitintervalls [0 , t] ab.
Diese Willkür in der Modellgleichung (1) vermeidet man mit einer Differentialgleichung (womit man sich den unfruchtbaren Streit um "Kleinheit" vom Halse schafft[2]).

MITTLERE ÄNDERUNGSRATE
Mit der Gleichung (1) erhalten wir:

> Die **mittlere Änderungsrate** der Salzmenge im Zeitintervall [t , t+Δt] ist :
>
> $$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \approx -S(t)\frac{1}{150} + 0.63$$

Damit ergibt sich :

> Die **momentane Änderungsrate** der Salzmenge zur Zeit t ist :
>
> $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = S'(t) = -S(t)\frac{1}{150} + 0.63 \qquad (2)$$

Was haben wir mit dieser Differentialgleichung erreicht ?
Die Salzmenge in der Lösung zum Zeitpunkt t können wir mit einer Gleichung beschreiben, die nicht von einem willkürlich kleinen Δt abhängt. Das Modell wird durch eine eindeutig bestimmte Gleichung beschrieben, deren Lösungen Funktionen S sind.

Bei der Beschreibung eines Prozesses in einem kleinen Intervall werden oft Vereinfachungen getroffen oder gewisse Einflüsse vernachlässigt. Überschreiten diese Annahmen ein erträgliches Mass, so wird die Differentialgleichung kein hinreichend genaues Modell des Prozesses im Kleinen mehr sein, und die Lösungen der Differentialgleichung beschreiben auch nicht mehr den realen Prozess. Daher sind die Lösungen stets mit der Wirklichkeit zu vergleichen. Sind die Abweichungen der Lösungen von der Wirklichkeit zu gravierend, so muss das Modell verfeinert oder ganz verworfen werden.

Eine der Hauptaufgaben der Analysis ist es, Aussagen über die Lösungen von Differentialgleichungen zu machen.

Die Analysis beschäftigt sich vor allem mit
- der Begründung exakter **Lösungsmethoden**,
- der **Existenz** von Lösungen,
- der **Eindeutigkeit** und den **Eigenschaften** der Lösungen,
- der Entwicklung von **Näherungsverfahren** für die Lösungen.

Wir werden später noch auf einige dieser Aufgaben zurückkommen.

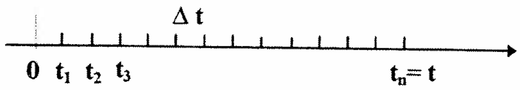
Modellkritik:
- Die homogene Salzverteilung dürfte nicht leicht realisierbar sein.
- Hingegen sind Annahmen für inhomogene Salzverteilungen schwierig zu formulieren.

[2] Gewöhnliche Differentialgleichungen , H.Heuser

Exakte Lösung:

Unser Nachsalzungsmodell ist ein besonderer Glücksfall. Wir können die mathematisch exakte Lösung S (t) des Problems direkt aus der Differenzengleichung bestimmen.

Wir wählen für das Zeitintervall [0, t] die folgende Unterteilung in n Teilintervalle:



$$t_i = \frac{t \cdot i}{n} \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots,\ n \quad \text{und} \quad \Delta t = \frac{t}{n}$$

Mit Hilfe der Gleichung (1) erhalten wir :

$S(t_{i-1} + \Delta t) = S(t_i) \approx S(t_{i-1}) \cdot (1 - \Delta t/150) + .63 \cdot \Delta t$ und $S(0) = 0$.

Zur Vereinfachung ersetzten wir: $z = 1 - \Delta t / 150$ und $A = 0.63 \cdot \Delta t$ also ist $S(t_i) \approx S(t_{i-1}) \cdot z + A$.

$S(t_0+\Delta t) = S(t_1) \approx A$

$S(t_1+\Delta t) = S(t_2) \approx S(t_1) \cdot z + A = A \cdot z + A = A(z+1)$

...

$$S(t_n) = S(t) \approx A(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}) = A\,\frac{1-z^n}{1-z} = 0.63 \cdot \Delta t\,\frac{1-(1-\Delta t/150)^n}{\Delta t/150}$$

$$S(t_n) = S(t) \approx 94.5\,(1 - (1 - \Delta t/150)^n) = 94.5\,\left(1 - \left(1 - \frac{t/150}{n}\right)^n\right)$$

CAS - HERLEITUNG:

Define s (i) = **when** (i = 0 , 0, s (i -1)* z + a) ⇒ Done

seq (s (i), i, 0, 5, 1) ⇒ $\{0 \quad a \quad a \cdot z + a \quad a \cdot (z^2+z+1) \quad a \cdot (z^3+z^2+z+1) \quad a \cdot (z^4+z^3+z^2+z+1)\}$

factor(a*Σ(z^i,i,0,n-1)) ⇒ $\frac{a \cdot (z^n - 1)}{z-1}$

ans (1) | z = 1 - (t /150) / n) **and** a = .63 · t / n [ENTER] ⇒ $-94.5 \cdot \left(\left(\frac{-.006667 \cdot (t - 150 \cdot n)}{n}\right)^n - 1\right)$

Bemerkungen:
- Ohne die Vereinfachungen rechnet sich das CAS ins Abseits.
- Die Gross- /Kleinschreibung wird bei Befehlen und Variablennamen nicht unterschieden.
- Eingabe von Σ: [2nd] Σ oder [G] [↑] [S]
- Die Teilsumme der geometrische Reihe wird für konkrete n nicht erkannt.
- Der max. Wert für i in seq( ), der kein Memory - Error liefert ist 26 !!
- Das exakte Schlussresultat würde ziemlich unübersichtlich dargestellt. Daher wird mit [ENTER] ein Näherungswert berechnet.

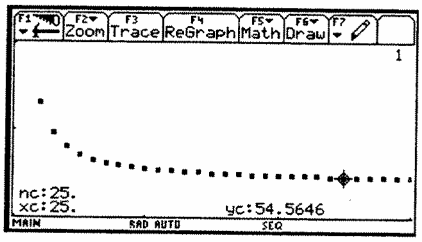
Mit dem TI-92 untersuchen wir die gefundene Formel nach t_n = 127 min für verschiedene n.

Einstellung : [MODE] Graph........FUNCTION-> 4: SEQUENCE

[Y=]
u1 (n) = 94.5 * (1 - (1 - (127/150) / n) ^ n)
ui1 = 0

[WINDOW] nmin=0 nmax= 30
xmin=0 xmax=30 xscl = 10
ymin=50 ymax=70 yscl = 10

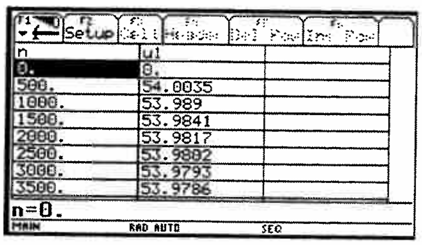
[GRAPH]



[TblSet] tblStart: 0 Δtbl : 500

[TABLE]

[F] Cell Width 12 (Zellbreite)



n	u1
0.	0.
500.	54.0035
1000.	53.989
1500.	53.9841
2000.	53.9817
2500.	53.9802
3000.	53.9793
3500.	53.9786

[MODE] Display Digits......FLOAT 12 (Stellenzahl erhöhen)
Vorsicht: Die Berechnung ist sehr viel langsamer !

Mit [MODE] [F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE werden die Berechnungen schneller.

Schnellere Alternativen:

[♦] [HOME]

Define u (n) = **when** (n=0,0, 94.5*(1- (1- (127/150) / n)^n)) **seq(** u(n), n, 0, 4000, 500)

[♦] [HOME] 94.5*(1- (1- (127/150) / n)^n) | n = {500, 1000, 1500, 2000, 3000, 4000}

[MODE] Graph........SEQUENCE-> 1: FUNCTION

[♦] [HOME] 94.5*(1 - (1- (127/150) /n)^n) | n≥1 -> a (n) **graph** a (n) , n oder

[♦] [TblSet] tblStart: 1000 Δtbl : 1000

[♦] [TABLE]

Resultat: S (127) scheint sich "einzupendeln" ; die Formel scheint "stabil" zu sein.

Wir haben also einen bequemen Weg zur Berechnung einer Näherungslösung gefunden.

Mit dem **Limit**-Befehl[3] des CAS kann man den Grenzwert bestimmen:

limit ((1 - (t / 150) / n) ^ n, n, ∞) ⇒ **undef** ***Fehler des TI-92 !***

limit ((1- (t /v) / n) ^ n, n, ∞) ⇒ $e^{-\frac{t}{v}}$

Für den Grenzwert gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} 94.5\left(1 - \left(1 - \frac{(t/150)}{n}\right)^n\right) = 94.5\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{150}}\right) = S(t) \qquad (3)$$

Damit können wir die Zeit für die Erreichung von 2 % Salzgehalt im Aquarium direkt berechnen.

zeros (189/2*(1 - *e*^(-t / 150)) - 54, t **)** ⇒ { 150 ln (7 / 3) }

Eine Näherung bekommt man mit :

[♦] [ENTER] ⇒ { 127.095 }

Bemerkungen: **solve(** 94.5*(1 - *e*^(-t / 150)) =54, t **)** ⇒ false, ***d. h. keine Lösung !***
Warning:Memory full, simplification might be incomplete

solve(94.5*(1 - *e*^(-t / 150)) -54=0, t **)** ⇒ t = 127.095 ***kein Problem !***

solve(189/2*(1 - *e*^(-t / v)) =54, t **)** ⇒ t = v · ln (7 / 3) ***kein Problem !***

Aufgaben:

Untersuche mit dem CAS die Funktion (3).

a) Bestimme die mittlere Änderungsrate für das Intervall [t , t+Δt] .
b) Bestimme den Grenzwert (Δt → 0) für die mittlere Änderungsrate zum Zeitpunkt t.
c) Setze den Grenzwert und die Funktion (3) in die Differentialgleichung (2) ein, und überprüfe so, dass die Funktion (3) die Gleichung (2) erfüllt.

Nun wollen wir das Entleerungsmodell untersuchen.

---

[3] Wann bestimmt der TI-92 den Grenzwert richtig ?

limit ((1- (t /v)/ n)^n, n,∞) | v = {95, 96, 97, 98, 99, 100} ⇒ { $e^{-\frac{t}{95}}$ 0 $e^{-\frac{t}{97}}$ undef undef ∞ }

1.2.2 Entleeren

MODELLIERUNG:
Das Aquarium ist $l = 180$ cm lang, $b = 100$ cm breit und $h = 150$ cm hoch. In der Grundfläche befindet sich ein Abfluss mit einem Querschnitt $Q = 36\ \text{cm}^2$. Zur Zeit $t = 0$ ist das Aquarium bis zum Rand gefüllt. Die Höhe des Wasserspiegels zur Zeit t (Sek.) ist $y(t)$ in cm.

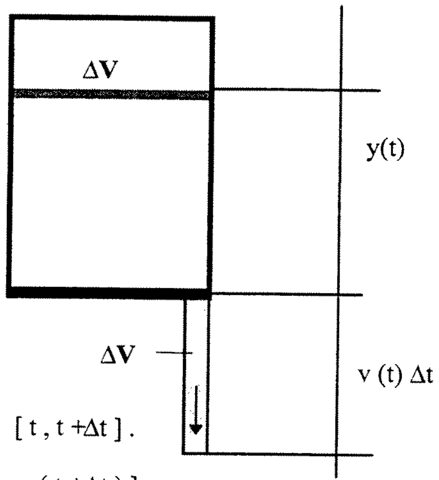
Auftrag: Untersuche die Ausfliesszeit.

Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion y abgeleitet werden.

Eigenschaften von y:

- $y(0) = 150$ und $y(t) \geq 0$
- y ist eine *monoton fallende* Funktion
- $\exists\, t_0$ mit $y(t_0) = 0$ und $y(t) > 0 \ \forall t < t_0$; $\mathbb{W}: 0 \leq y(t) \leq 150$
- $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ mit $y(t) = 0 \ \forall t \geq t_0$
- Vermutung: Der Wasserspiegel fällt immer langsamer

Aufgrund dieser Eigenschaften kann der Graph der Funktion S skizziert werden.



Gesetz von Torricelli
Unter der Annahme, dass $g = 1000\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$ ist, gilt für die Abflussgeschwindigkeit: $v(t) = 20\sqrt{5} \cdot \sqrt{y(t)}$ cm / s.

Wir betrachten die Volumenänderung in einem sehr kleinen Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$.

Volumenabnahme im Behälter : $l \cdot b \cdot [y(t) - y(t+\Delta t)] = 18000\, [y(t) - y(t+\Delta t)]$
Abgeflossenes Volumen: $\Delta V \approx Q \cdot v(t)\,\Delta t = 36 \cdot 20 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{y(t)}\,\Delta t$

CAS: $18000 * (y(t) - y(t+\Delta t)) = 36 * 20 * \sqrt{5} * \sqrt{y(t)} * \Delta t$

ans (1) $*(-1)/\Delta t/18000 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \dfrac{-\sqrt{5 \cdot y(t)}}{25}$

Die **mittlere Änderungsrate** (mittlere Sinkgeschwindigkeit) des Wasserspiegels im Intervall $[t, t + \Delta t]$ ist:

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx -\frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{y(t)} \qquad (4)$$

Aufgaben:

- Bestimme manuell für eine Zeitintervallänge von 0.5 s Näherungen für $y(0.5)$ und $y(1)$.
- Versuche mit dem CAS wie beim 1. Modell eine exakte Lösung mit der Differenzengleichung (4) zu bestimmen.

Die Gleichung für die **momentane Änderungsrate** der Wasserspiegelhöhe (Sinkgeschwindigkeit) zur Zeit t ist also:

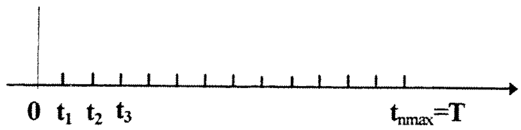
$$\boxed{y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{y(t)}} \qquad (5)$$

Beachte: Die exakte Lösung kann man nicht mehr wie beim 1.Modell aus der Differenzengleichung herleiten.

Approximation mit dem Computer

Wir wollen nun herausfinden, wie lange es dauert, bis das Aquarium leer ist. Dazu unterteilen wir das Zeitintervall von 0 bis z. B. $T = 500$ s in nmax =100 gleichlange Intervalle.
Von $y(t_0) = y(0) = 150$ ausgehend, approximieren wir den Funktionswert $y(t_1)$, dann $y(t_2)$ etc. Lösung ist der Wert von t, bei dem $y(t)$ möglichst nahe bei 0 liegt.

Die Näherung (4) formen wir zuerst um zu : $y(t+\Delta t) \approx y(t) - \dfrac{\sqrt{5 \cdot y(t)}}{25}\,\Delta t$



Die Unterteilung für nmax = 100 ist : $\Delta t = 500 / 100 = 5$
$t_n = \Delta t \cdot n = 5 \cdot n$, $n = 0, 1, \ldots, 100$

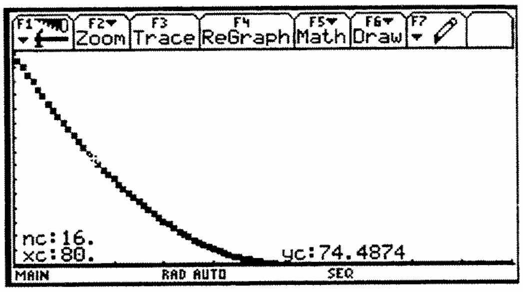
Damit erhalten wir : $y(t_n) \approx y(t_{n-1}) - \dfrac{\sqrt{5 \cdot y(t_{n-1})}}{5}$

Einstellung: [MODE] Graph.....FUNCTION->4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx....AUTO -> 3:APPROXIMATE (Berechnungen werden wesentlich schneller.)

◆ [Y=]

u1 (n) = 5*n	(Zeit: t_n)
u2(n) = u2(n-1) - √ (5*u2(n-1)) /5	(Höhe: y (t_n))
ui2 = 150	(Höhe: y (t_0))

[F 7]	Axes:	Time ->	3: CUSTOM	
	X Axis:	u1	(Zeit: t_n)	
	Y Axis:	u2	(Höhe: y (t_n))	



◆ [WINDOW]

nmin = 0	nmax=100	(Bereich : Nummern)
xmin=0	xmax=500	(Bereich der Zeit t)
ymin=0	ymax=150	(Bereich der Funktion y)
xscl=50	yscl=10	(Achsenteilungen)

◆ [GRAPH]

◆ [TblSet] tblStart: 47 (Startnummer) Δtbl : 1 (Schrittweite)

◆ [TABLE]

n	u1	u2
47.	235.	2.2606
48.	240.	1.5882
49.	245.	1.0246
50.	250.	.57193
51.	255.	.23372
52.	260.	.01752
53.	265.	-.0417
54.	270.	undef

n=52.

Resultat: Nach nc=16 Zeiteinheiten, d.h. nach xc=80 Sekunden, ist das Aquarium halbleer.Nach nc=52 Zeiteinheiten, d. h. nach xc=260 Sekunden, ist das Aquarium leer.

Verbesserung: N = 1000 **sehr langsam !!** Änderung bei ◆ [Y=] u2(n) = u2(n-1) -√ (5*u2(n-1)) *0.02

◆ [WINDOW] nmax=1000

n	u1 (= t)	u2 (= y)
543	271.5	0.0018
544	272	-1 E -4

Die Lösung mit dem **Sequence Graphing** ist oft sehr langsam. Mit einem Programm bekommt man auch für kleine Intervalle die Näherungen schneller.

Programm für die Approximation der Differentialgleichung : y ' = f (x , y) :

- Taste [APPS] 7: Program Editor 3: New... Type: Function -> Program
  Variable: euler
- Das Programm eintippen

```
euler ( funk, xv, yv, x0, y0, xbis, dx, OutStep )
Prgm

   Local xx, yy, m, aus
   ClrIO
   Disp "      "&string(x0)&"          "&string(y0)

   y0 -> yy:      0 -> aus
   For  xx, x0, xbis-dx, dx
      funk | xv =xx  and  yv = yy  -> m
      yy + m * dx   -> yy
      aus + 1      -> aus
   If  aus*dx ≥ OutStep Then
      Disp "      "&string(xx+dx)&"          "&string(yy)
      0  -> aus
   EndIf
   EndFor
   If  aus > 0 Then
      Disp "      "&string(xx)&"          "&string(yy)
   EndIf
EndPrgm
```

PARAMETER:

funk :	Funktionsterm f (x , y)
xv, yv :	Funktionsvariablen
(x0, y0):	Startpunkt
xbis :	Endstelle der Approximation
dx :	Intervallbreite der Approximation
OutStep:	Ausgabeschritt

Aufruf :
◆ [HOME]

euler (-√ (5 * y) / 25, x, y, 0, 150, 271.5, 0.5, 50)

```
0     150
  50.     100.183
  100.    60.3764
  150.    30.5848
  200.    10.8141
  250.    1.08063
  271.5   .001801
MAIN        RAD AUTO        SEQ 30/30
```

1. Herleitung der Lösungsfunktion:

Ansatz : Die Form des Graphen von y und die Eigenschaften von y legen den Ansatz einer Potenzfunktion für y nahe: $y(t) = (a + b\,t)^c$

Definition : (a + b * tt)^c -> y (tt) $\Rightarrow$ Done

Mittlere Änderungsrate: (y (t + dt) - y (t)) / dt -> q (t, dt) $\Rightarrow$ Done

Momentane Änderungsrate: **Limit** (q (t, dt), dt, 0) $\Rightarrow \dfrac{b\cdot c\cdot(b\cdot t+a)^c}{b\cdot t+a}$

Bestimmung der Parameter: Aus der Differentialgleichung $y'(t) = -\frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{y(t)}$ folgt:

$$\frac{b\cdot c\cdot(b\cdot t+a)^c}{b\cdot t+a} = -\frac{\sqrt{5}}{25}(a+b\cdot t)^{\frac{c}{2}} \quad \forall t$$

Manuelle Herleitung[4]:

$$(b\,c)^2\,(b\,t+a)^{2(c-1)} = \frac{1}{125}\,(a+b\,t)^c \quad \forall t$$

$$2(c-1) = c \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

$$(b\cdot 2)^2 = \frac{1}{125} \quad \Rightarrow \quad b = \pm\frac{\sqrt{5}}{50} \quad (\text{y monoton fallend} \Rightarrow b < 0)$$

$$y(0) = a^c = a^2 = 150 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 5\cdot\sqrt{6}$$

Lösung:

$$y(t) = \left(5\cdot\sqrt{6} - \frac{\sqrt{5}}{50}\,t\right)^2$$

2. Herleitung der Lösungsfunktion (Separation der Variablen):

$$y'(t) = -\frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{y(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{y(t)}} = -\frac{\sqrt{5}}{25}\,dt$$

solve (∫ (y^(-1/2) , y) = ∫ (- √(5) / 25 , t ,c), y) $\Rightarrow y = \dfrac{(\sqrt{5}\cdot t-25\cdot c)^2}{2500}$ and $\sqrt{5}\cdot t-25\cdot c \le 0$

(√(5) *t - 25*c)^2/2500 -> y (t , c) $\Rightarrow$ Done

solve (y (0, c) = 150 , c) $\Rightarrow c = 10\cdot\sqrt{6}$ or $c = -10\cdot\sqrt{6}$

y (t , 10 * √6) $\Rightarrow \dfrac{(\sqrt{5}\cdot t-250\sqrt{6})^2}{2500}$

Lösungsfunktion : $y(t) = \dfrac{(\sqrt{5}\cdot t-250\sqrt{6})^2}{2500}$

Bestimmung der exakten Entleerungszeiten

1. Auf das halbe Volumen : **solve** (y (t , 10 ·√6) =75, t) $\Rightarrow t = 50(\sqrt{2}-1)\sqrt{15}$ (≈ 80)
2. Völlige Entleerung: **solve** (y (t , 10 ·√6) =0, t) $\Rightarrow t = 50\sqrt{30}$ (≈ 274)

Modellkritik:

- Wasserwirbel (vorallem am Schluss der Entleerung) werden nicht berücksichtigt.

Die SchülerInnen müssen eine minimale Fertigkeit in der Technik des **Sequence Graphing** mit dem TI-92 erreichen, damit sie bei der Bearbeitung der Modelle nicht an der Bedienung des TI-92 scheitern.

Aufgabe:

Untersuche die Funktion $y(t)$ mit $y(t+\Delta t) \approx y(t)(1 + (10 - y(t))\Delta t/20)$ und $y(0) = 1$
Bestimme eine Näherung für $y(7)$. Wann ist $y(t) = 5$?

---

[4] CAS erleichtert die Algebra für die Bestimmung der Parameter nicht.

1.2.3 Salzen - Entleeren

MODELLIERUNG

Im Meerwasseraquarium sind am Anfang $m_0 = 900$ kg Salzwasser mit einem Salzgehalt von q% = 6%. Das Aquarium hat die Abmessungen l = 180 cm, b = 100 cm und h = 150 cm.
Der Querschnitt des Ablaufs im Boden des Aquariums ist $Q = 36\ cm^2$.
Pro Sekunde werden z = 18 kg Salzwasser mit einem Salzgehalt von p% = 3% in das Aquarium eingeleitet.

Modellannahmen:

- Die Salzkonzentration im Aquarium ist homogen, dh. in jeder Volumeneinheit ist jeweils gleichviel Salz enthalten.
- In einem kleinen Zeitintervall wird zuerst das Wasser aus dem Aquarium abgelassen und danach fliesst das Salzwasser in das Aquarium.
- 1 kg Salzwasser = 1 ℓ Salzwasser. Es ist also: $V_0 = 900\ \ell = 900\ 000\ cm^3$ und das Zuflussvolumen pro Sekunde $z = 18\ \ell = 18000\ cm^3$.
- $g = 1000\ cm \cdot s^{-2}$

Bezeichnungen:

S (t): Salzmenge (kg), die zum Zeitpunkt t im Aquarium vorhanden ist.
V (t): Volumen des Salzwassers (cm^3), das zum Zeitpunkt t im Aquarium vorhanden ist.
y (t): Wasserhöhe (cm) im Aquarium zum Zeitpunkt t ($y(t) \cdot 180 \cdot 100 = V(t)$).

Gesetz von Torricelli

Unter der Annahme, dass $g = 1000\ cm \cdot s^{-2}$ ist, gilt für die Abflussgeschwindigkeit: $v(t) = 20\sqrt{5}\cdot\sqrt{y(t)}$ cm / s

Auftrag: Untersuche die Entwicklung der Salzmenge im Aquarium, wenn gleichzeitig der Ablauf offen ist.

Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion S abgeleitet werden.

Eigenschaften von S und V:

- $S(0) = V_0 \cdot q / 100 = 54$ kg   Salzmenge zum Zeitpunkt 0
- Der Zufluss bringt konstant $z \cdot p / 100 = 0.54$ kg Salz pro Sekunde in das Aquarium. Am Anfang gehen durch den Abfluss $\frac{Q\cdot v(0)}{10^3\cdot V_0}\cdot S(0) = 0.6830$ kg Salz pro Sekunde verloren. S ist daher zumindest am Anfang eine *monoton fallende* Funktion.
- Der Abfluss in einer Sekunde ist am Anfang $Q \cdot v(0) / 10^3 = 11.38\ \ell$. Daher nimmt das Salzwasservolumen V(t) zu, während der Salzgehalt fällt. Der Salzverlust nimmt also mit der Zeit ab. Dadurch wird der Salzzuwachs nach einer gewissen Zeit den Verlust übertreffen, und S wird dann *monoton wachsen.*
- $V(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} V^*$ und $S(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} S^*$ (falls $z \leq$ Max. Abfluss $= 36 \cdot 20 \cdot \sqrt{5}\cdot\sqrt{150}\,/10^{-3} \approx 19{,}7$)

Allgemeine Approximation:

Wir betrachten die Änderungsrate von V und S in einem sehr kleinen Zeitintervall [t , t +Δt] :

Wasserabfluss im Intervall [t, t+ Δt]: $\approx Q \cdot v(t)\,\Delta t = 36 \cdot 20\sqrt{5}\cdot\sqrt{y(t)}\,\Delta t = 36 \cdot 20\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{V(t)}{18000}}\cdot\Delta t$

$\approx 12\sqrt{V(t)}\,\Delta t$

Wasserzufluss im Intervall [t, t+ Δt]: $z \cdot 10^3\ \Delta t = 18 \cdot 10^3\ \Delta t$

Wasservolumen zur Zeit t+ Δt:	$V(t+\Delta t) \approx V(t) - Q \cdot v(t)\,\Delta t + z \cdot 10^3\ \Delta t$ $V(t+\Delta t) \approx V(t) - 12\sqrt{V(t)}\,\Delta t + 18 \cdot 10^3\ \Delta t$

(6)

Salzverlust im Intervall [t, t+ Δt]: $\approx Q\cdot v(t)\cdot\Delta t\cdot\frac{S(t)}{V(t)} = \frac{12\cdot\sqrt{V(t)}}{V(t)}\,S(t)\,\Delta t = \frac{12}{\sqrt{V(t)}}\,S(t)\,\Delta t$

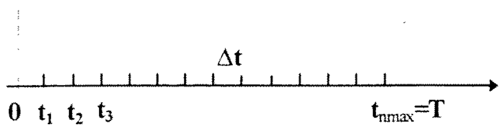
Salzzuwachs im Intervall [t, t+ Δt]: $z \cdot \frac{p}{100}\,\Delta t = 0.54\ \Delta t$

Salzmenge zum Zeitpunkt t+Δt:	$S(t+\Delta t) \approx S(t) - \frac{12}{\sqrt{V(t)}}\,S(t)\,\Delta t + 0.54\ \Delta t$

(7)

Approximation mit dem Computer:

Wir wollen die Entwicklung des Salzwasservolumens und der Salzmenge im Aquarium in den ersten 2000 Sekunden betrachten. Dazu unterteilen wir das Zeitintervall von 0 bis T = 2000 s in nmax = 200 gleichlange Intervalle. Von $V(t_0) = V(0) = 900\,000$ und $S(t_0) = S(0) = 54$ ausgehend, approximieren wir schrittweise die Funktionswerte von V und S jeweils an der nächstfolgenden Stelle.



Aus den Gleichungen (6) und (7) für $t = t_{n-1}$ und $t + \Delta t = t_n$ folgt:

$$V(t_n) \approx V(t_{n-1}) - 12\sqrt{V(t_{n-1})}\,\Delta t + 18 \cdot 10^3\,\Delta t$$

$$S(t_n) \approx S(t_{n-1}) - \frac{12}{\sqrt{V(t_{n-1})}} S(t_{n-1})\,\Delta t + 0.54\,\Delta t$$

nmax = 200 $\Rightarrow$ $\Delta t = T / \text{nmax} = 10$ und

$t_n = \Delta t \cdot n = 10 \cdot n$ mit $n = 0,1,\ldots,200$

Einstellung : [MODE] Graph........ FUNCTION-> 4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

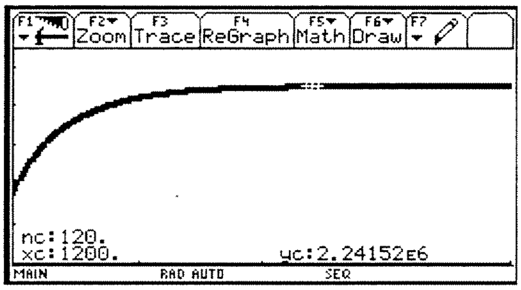
[Y=]

u1 (n) = 10*n	(Zeit: t_n)
ui1 = 0	(Zeit: t_0)
✓ u2(n)= u2(n-1) - 120*√ (u2(n-1))+180000	(Volumen $V(t_n)$)
ui2 = 900000	(Volumen $V(t_0)$)
u3(n) = u3(n-1)*(1-120 / √ (u2(n-1)))+ 5.4	(Salz: $S(t_n)$)
ui3 = 54	(Salz: $S(t_0)$)

Bemerkung: Bei einer Folge kann man mit [F4] das Zeichen ✓ setzen oder löschen. Für die so ausgewählte Folge wird der Graph gezeichnet.

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1 (Zeit: t_n)
Y Axis: u2 (Volumen: $V(t_n)$)

Wasservolumen:



[WINDOW]

nmin = 0	nmax=200	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=2000	(Bereich der Zeit t)
ymin=0	ymax=2700000	(Bereich der Funktion V)
xscl =500	yscl =500000	(Unterteilung der Achsen)

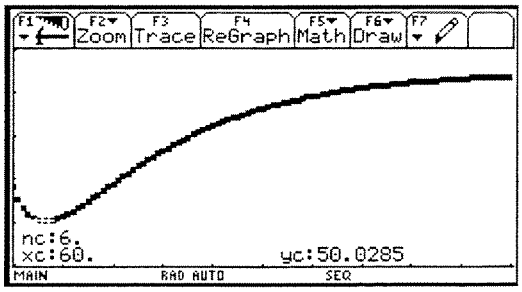
[GRAPH] [F 3] Trace: ▷▷▷

[Y=]

u1 (n) = 10*n	(Zeit: t_n)
ui1 = 0	(Zeit: t_0)
u2(n)= u2(n-1) - 120*√ (u2(n-1))+180000	(Volumen $V(t_n)$)
ui2 = 900000	(Volumen $V(t_0)$)
✓ u3(n) = u3(n-1)*(1-120 / √ (u2(n-1)))+ 5.4	(Salz: $S(t_n)$)
ui3 = 54	(Salz: $S(t_0)$)

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1 (Zeit: t_n)
Y Axis: u3 (Salz: $S(t_n)$)

Salzmenge:



[WINDOW]

nmin = 0	nmax=100	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=1000	(Bereich der Zeit t)
ymin=45	ymax=70	(Bereich der Funktion S)
xscl = 100	yscl =5	(Unterteilung der Achsen)

[GRAPH] [F 3] Trace: ▷▷▷

Feststellungen:

- Nach nc=120 Zeiteinheiten, d. h. nach xc=1200 s = 20 min, hat man schon fast das max. Volumen erreicht.
- Nach nc=6 Zeiteinheiten, d. h. nach xc=60 s = 1 min, erreicht die Salzmenge im Aquarium ein Minimum.

Differentialgleichungen:

Aus den Gleichungen (6) und (7) bekommt man:

Die **mittlere Änderungsrate** des Volumens im Intervall [t , t+Δt]: $\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} \approx -12\sqrt{V(t)} + 18 \cdot 10^3$
Die **mittlere Änderungsrate** der Salzmenge im Intervall [t , t+Δt]: $\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \approx -\frac{12}{\sqrt{V(t)}} S(t) + 0.54$

Die **momentanen Änderungsraten** zur Zeit t sind dann:

$$V'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} = -12\sqrt{V(t)} + 18 \cdot 10^3 \qquad \text{mit } V(0) = 900000\ \text{cm}^3$$

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = -\frac{12}{\sqrt{V(t)}} S(t) + 0.54 \qquad \text{mit } S(0) = 54\ \text{kg}$$

Die Lösungen des Entsalzungsmodells werden wir im 4. Kapitel noch ausführlicher untersuchen.

Aufgaben:

a) Gegen welchen Grenzwert strebt das Volumen V (t) bzw. die Salzmenge S (t)?
   Bedingung: $z = Q \cdot v$
   solve(18000 = 36 * 20 * √ (5*y), y) ⇒ y = 125
   Daraus folgt: $V^* = 2250\ \ell$ und $S^* = 2250 \cdot 3/100 = 67.5$ kg

b) Wie gross muss der Zufluss z - gemessen in ℓ / s - sein, damit das Volumen V (t) gegen das Volumen des Aquariums strebt?
   Damit $V^* = 2700\ \ell$ (y = 150) ist muss für den Zufluss gelten: $z \cdot 10^3 = 36 \cdot 20 \sqrt{5 \cdot 150}$
   solve(z * 10³ =36 * 20 * √ (5*150), z) ⇒ $z = \frac{18 \cdot \sqrt{30}}{5}$ ⇒ $z = 19.718..\ \ell / s$

c) Für welche Zuflussrate z nimmt das Volumen ab ?
   solve(z * 10³ ≤ 36 * 20 * √ (5*50), z) ⇒ $z \le \frac{18 \cdot \sqrt{10}}{5}$ ⇒ $z \le 11.384..\ \ell / s$

Modellkritik:
Die Vereinfachung, dass 1ℓ Salzwasser 1 kg Salzwasser entspricht, ist nicht wesentlich.

Wird anstelle des Abflusses eine konstante Menge a ℓ / s Aquariumwasser abgepumpt, so erhält man ein wesentlich einfacheres Modell. Dieses Modell wollen wir zum Abschluss noch untersuchen.

1.2.4 Entsalzen durch Abpumpen

MODELLIERUNG

Im Aquarium sind am Anfang m_0 = 900 kg Salzwasser mit einem Salzgehalt von q% = 8%. Solange das Aquarium, das 2700 kg fasst, nicht voll ist, werden pro Sekunde a = 6 kg Aquariumwasser abgepumpt und gleichzeitig pro Sekunde z = 8 kg Salzwasser mit einem Salzgehalt von p% = 3 % in das Aquarium eingeleitet.

Modellannahmen:

- Die Salzkonzentration im Aquarium ist homogen, d. h. in jeder Volumeneinheit ist jeweils gleichviel Salz enthalten.
- In einem kleinen Zeitintervall wird zuerst das Wasser aus dem Aquarium abgepumpt, und danach fliesst das Salzwasser in das Aquarium.

Bezeichnungen:

S (t) : Salzmenge (kg), die zum Zeitpunkt t im Aquarium vorhanden ist.
m (t): Salzlösung (kg), die zum Zeitpunkt t im Aquarium vorhanden vorhanden ist.

Auftrag: Untersuche die Entwicklung der Salzmenge im Aquarium.

Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion S abgeleitet werden.

Eigenschaften von S :

- $S(0) = m_0 \cdot q / 100 = 72$ Salzmenge zum Zeitpunkt 0
- Der Zufluss bringt konstant $z \cdot p / 100 = 0.24$ kg Salz pro Sekunde in das Aquarium. Am Anfang gehen durch den Abfluss $a / m_0 \cdot S(0) = 0.48$ kg Salz pro Sekunde verloren. S ist daher zumindest am Anfang eine *monoton fallende* Funktion.
- Die Salzwassermenge m(t) im Aquarium steigt, während der Salzgehalt stetig fällt. Der Salzverlust nimmt also mit der Zeit ab. Dadurch wird der Salzzuwachs nach einer gewissen Zeit den Verlust übertreffen und S wird dann *monoton wachsen.*

Manuelle Approximationen:

Die Zeit unterteilen wir in kleine, gleichlange Intervalle.

Zeitintervallänge : 2 Sekunden

1. Zeitintervall [0, 2]

   Salzverlust : $a \cdot \frac{S(0)}{m_0} \cdot 2 = 0.96$ Salzzuwachs: $z \cdot \frac{p}{100} \cdot 2 = 0.48$

   Salzmenge nach 2 Sekunden: $S(2) \approx 72 - 0.96 + 0.48 = 71.52$ kg

2. Zeitintervall [2, 4]

   Das Salzwassermenge im Aquarium hat sich verändert .
   Sie ist nun nach 2 Sekunden: $m(2) = m_0 + 2 \cdot z - 2 \cdot a = 900 + 4 = 904$ kg

   Salzverlust: $a \cdot \frac{S(2)}{m(2)} \cdot 2 = 6 \cdot \frac{71.52}{904} \cdot 2 = 0.9494$ Salzzuwachs: $z \cdot \frac{p}{100} \cdot 2 = 0.48$.

   Salzmenge nach 4 Sekunden: $S(4) \approx 71.52 - 0.9494 + 0.48 = 71.05$ kg

usw.

Allgemeine Approximation:

Wir betrachten die Änderungsrate von S in einem sehr kleinen Zeitintervall [t , t +Δt] :

Wassermenge im Aquarium zur Zeit t: $m(t) = m_0 + (z - a)t = 900 + 2t$

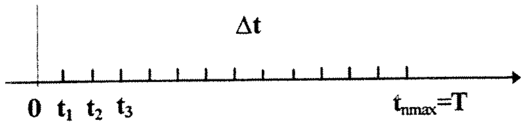
Salzverlust im Intervall [t, t+ Δt]: $a \cdot \frac{S(t)}{m(t)} \Delta t = a \cdot \frac{a}{m_0 + (z-a)t} S(t)\Delta t = \frac{6}{900+2t} S(t)\Delta t$

Salzzuwachs im Intervall [t, t+ Δt]: $z \cdot \frac{p}{100} \Delta t = 0.24 \Delta t$

$$\boxed{\text{Salzmenge zum Zeitpunkt } t+\Delta t: \quad S(t+\Delta t) \approx S(t) - \frac{6}{900+2t} S(t)\Delta t + 0.24\,\Delta t} \qquad (8)$$

Approximation mit dem Computer

Wir wollen die Entwicklung der Salzmenge im Aquarium in den ersten 900 Sekunden (Füllzeit) betrachten. Dazu unterteilen wir das Zeitintervall von 0 bis z. B. T = 900 s in nmax = 1800 gleichlange kleine Intervalle. Von $S(t_0) = S(0) = 72$ ausgehend, approximieren wir schrittweise den Funktionswert von S jeweils an der nächstfolgenden Stelle.



Aus der Gleichung (8) für $t = t_{n-1}$ und $t + \Delta t = t_n$ folgt:

$$S(t_n) \approx S(t_{n-1}) - \frac{6}{900+2t} S(t_{n-1})\,\Delta t + 0.24\,\Delta t$$

$nmax = 1800 \Rightarrow \quad \Delta t = T / nmax = 0.5$ und

$t_n = \Delta t \cdot n = .5 \cdot n$ mit $n = 0,1, ..1800$

Einstellung : [MODE] Graph........ FUNCTION-> 4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

[Y=]

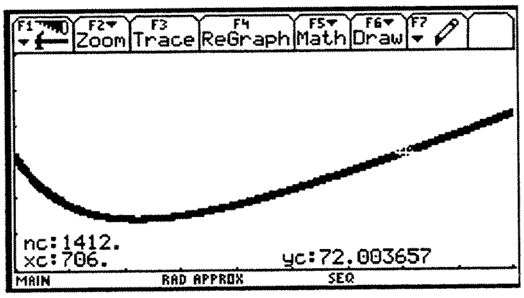
u1 (n) = 0.5*n (Zeit: t_n)
ui1 = 0 (Zeit: t_0)
u2(n) = u2(n-1)*(1-3 /(900+2*u1(n-1)))+0.12 (Salz: $S(t_n)$)
ui2 = 72 (Salz: $S(t_0)$)

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1 (Zeit: t_n)
Y Axis: u2 (Salz: $S(t_n)$)

[WINDOW]

nmin = 0 nmax=1800 (Bereich der Nummern)
xmin=0 xmax=900 (Bereich der Zeit t)
ymin=40 ymax=100 (Bereich der Funktion S)
xscl = 100 yscl =10 (Unterteilung der Achsen)

[GRAPH] [F 3] Trace: ▷▷..▷



Feststellungen:

- Nach ca. 223 s wird die kleinste Salzmenge 53.80 kg erreicht.
- Nach ca. 706 s = 11 min 46 s ist wieder gleich viel Salz im Aquarium wie am Anfang.

Differentialgleichung

Aus der Gleichung (8) bekommt man:

Die **mittlere Änderungsrate** der Salzmenge im Intervall [t , t+Δt]: $\dfrac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \approx -\dfrac{6}{900+2t} S(t) + 0.24$

Die **momentane Änderungsrate** zur Zeit t ist: $S'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = -\dfrac{6}{900+2t} S(t) + 0.24$

Bemerkung

Die allgemeinen Entsalzungsmodelle sollte man erst in Angriff nehmen, nachdem die SchülerInnen mit der selbstständigen Bearbeitung von einfachen Projekten Erfahrungen gesammelt und einige Fertigkeiten im Umgang mit dem Sequence-Graphing des TI-92 erreicht haben.

Ausblick

Den Grenzübergang von der mittleren Änderungsrate zu der momentanen (lokalen) Änderungsrate, den wir eben nur andeuten konnten, muss nun bei konkreten Funktionen und Funktionsklassen genauer und systematisch studiert werden.

1.3 Projekte mit Lösungsskizzen

1. EINFACHE ENTSALZUNG

Eine Salzlösung in einem vollen Behälter soll durch die stetige Zufuhr von Süsswasser und den Abfluss von Salzlösung verdünnt werden. Wie verändert sich die Salzmenge im Behälter ? Nach welcher Zeit ist der Salzgehalt auf die Hälfte gesunken?

Modellierung

Für die Untersuchung des Problems betrachten wir z. B. die folgende Versuchsanordnung:
In einem Behälter mit V=100 dm^3 Wasser sind m=200 g Salz. Durch ein Rohr fliesst pro Sekunde W=1 dm^3 reines Wasser in den Behälter, in der gleichen Zeitspanne laufen W dm^3 Salzwasser aus. Die Versuchanordnung garantiert, dass die Salzkonzentration im Behälter stets homogen ist, d. h. in jeder Volumeneinheit ist jeweils gleich viel Salz enthalten.

Mit S (t) bezeichnen wir die Salzmenge, die im Behälter zum Zeitpunkt t (Sekunde) vorhanden ist. S ist also die Funktion, die in jedem Zeitpunkt t angibt, wieviel Salz noch im Wasser vorhanden ist.

Eigenschaften von S :

- $S(0) = 200$
- S ist eine *streng monoton fallende* Funktion
- Definitionsbereich |D : $t \geq 0$
- Vermutung: S wird immer langsamer abnehmen
- $S(t) > 0$
- $S(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$
- Wertebereich |W: $0 < S(t) \leq 200$

Allgemeine Approximation:

Wir betrachten die Änderung der Salzmenge in einem beliebigen sehr kleinen Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$

Salzmenge zum Zeitpunkt 0: $S(0) = m = 200$ Salzmenge zum Zeitpunkt t : $S(t)$

Salzverlust im Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$: $\approx S(t)\frac{W \cdot \Delta t}{V} = S(t)\frac{1 \cdot \Delta t}{100}$

Salzmenge zum Zeitpunkt $t+\Delta t$: $S(t+\Delta t) \approx S(t) - S(t)\frac{1}{100}\Delta t$

Approximation mit dem Computer

Wir unterteilen das Intervall [0 , 100s] in nmax = 200 gleich lange Teilintervalle der Länge Δt.
nmax = 200 $\Rightarrow$ $\Delta t = T / nmax = 0.5$ und $t_n = t \cdot n / nmax = .5 \cdot n$ mit $n = 0,1,...,200$

$S(t_n) \approx S(t_{n-1}) - S(t_{n-1})\Delta t / 100 = S(t_{n-1})(1 - \Delta t / 100)$

Einstellung : [MODE] Graph........ FUNCTION-> 4: SEQUENCE

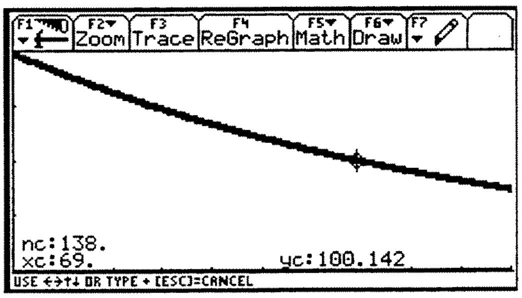
[◆] [Y=]

u1 (n) = 0.5*n	(Zeit: t_n)
ui1 = 0	(Zeit: t_0)
u2(n) = u2(n-1)*(1-0.5/100)	(Salz: $S(t_n)$)
ui2 = 200	(Salz: $S(t_0)$)

[F 7] Axes:	Time ->	3: CUSTOM	
X Axis:	u1	(Zeit: t_n)	
Y Axis:	u2	(Salz: $S(t_n)$)	

[◆] [WINDOW]

nmin = 0	nmax=200	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=100	(Bereich der Zeit t)
ymin=0	ymax=200	(Bereich der Funktion S)
xscl = 10	yscl =50	(Unterteilung der Achsen)



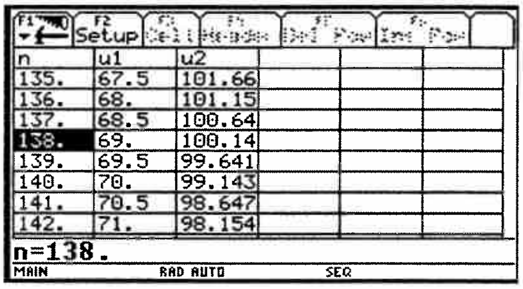
[◆] [GRAPH] [F 3] Trace: ▹▹▹

Resultat: Nach nc=138 Zeiteinheiten, d. h. nach xc= 69 Sekunden, sind noch ca. 100 g Salz in der Lösung.

Alternative:

◆ [TblSet] tblStart: 135 (Startnummer) Δtbl : 1 (Schrittweite)

◆ [TABLE]



n	u1	u2			
135.	67.5	101.66			
136.	68.	101.15			
137.	68.5	100.64			
138.	69.	100.14			
139.	69.5	99.641			
140.	70.	99.143			
141.	70.5	98.647			
142.	71.	98.154			

Exakte Lösung

CAS - HERLEITUNG:

$S(t_{i-1}+\Delta t) = S(t_i) \approx S(t_{i-1}) - S(t_{i-1})\,\frac{1}{100}\,\Delta t$, $S(0) = s0$ und $\Delta t = \frac{t}{n}$

Zur Vereinfachung ersetzen wir : z = t / 100

Define s (i) = **when (** i =0, s0, s (i-1)*(1 - z / n) **)**

seq (s (i), i, 0, 30, 5) $\Rightarrow$ $\left\{ s0 \quad \frac{-s0\cdot(z-n)^5}{n^5} \quad \frac{s0\cdot(z-n)^{10}}{n^{10}} \;\cdots\cdots\; \frac{-s0\cdot(z-n)^{25}}{n^{25}} \quad \frac{s0\cdot(z-n)^{30}}{n^{30}} \right\}$

Bemerkungen:
- Ohne die Vereinfachung rechnet sich das CAS ins Abseits.
- Der max. Wert für i, der keinen Memory-Error liefert, ist 34 !!

Für den Grenzwert gilt:

$$S(t) = \lim_{n\to\infty} S(0)\left(1 - \frac{(t/100)}{n}\right)^n = S(0)\,e^{-\frac{t}{100}} = 200\,e^{-\frac{t}{100}}$$

Wir verweisen für die Berechnung dieses Grenzwertes mit Hilfe des CAS auf die Fussnote 3.

Halbwertszeit:

solve (200*e^(-t / 100)=100, t **)** $\Rightarrow$ $t = 100 \ln(2)$ (≈ 69.3)

Es vergehen 69.3 Sekunden, bis die Salzmenge auf die Hälfte reduziert ist.

2. UNBEGRENZTES WACHSTUM

Im Labor wird unter optimalen Bedingungen die Entwicklung einer Bakterienpopulation beobachtet. Wie wächst die Poulation ?

Modellierung

Anfangsbestand $N(0) = N_0 = 10^3$

Annahme: Der rel. Zuwachs (prozentualer Zuwachs) in einem sehr kleinen Zeitintervall ist proportional zur Länge des Zeitintervalls Δt.
Der Proportionalitätsfaktor ist k = 0.2 pro Stunde.

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{N(t)} \approx k\Delta t$$

Mittlere Änderungsrate: $\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} \approx k\,N(t)$

Momentane Änderungsrate: $N'(t) = k\,N(t)$

Exakte Lösung: $N(t) = N_0\,e^{kt} = 10^3\,e^{0.2t}$

3. LERNVERMÖGEN

Jeder hat schon erfahren oder erlitten, dass er zunächst sehr rasch und dann immer langsamer lernt und nach einiger Zeit kaum noch zusätzlichen Stoff aufnehmen kann. Man nähert sich mit der Zeit der individuellen maximalen Lernstoffmenge L_m.

Modellierung (siehe: Nachsalzungsmodell)

Annahmen:
- Die maximale Lernstoffmenge ist 200 einzelne Lerneinheiten .
- Die Lernstoffmenge, die man bis zum Zeitpunkt t (Minuten) gelernt hat ist L (t).
- Der mittlere Zuwachs an gelernten Einheiten in einem kleinen Zeitintervall ist proportional zur Länge des Zeitintervalls und zur noch lernbaren Lernstoffmenge ($L_m - L(t)$).
- Mit Experimenten wurde der Proportionalitätsfaktor auf 0.02 geschätzt dh. in einer Minute lernt man im Mittel 2% der noch lernbaren Stoffmenge

Nach welcher Zeit hat man 90% der maximalen Lernstoffmenge gelernt ?

Mittlere Änderungsrate: $\dfrac{L(t+\Delta t)-L(t)}{\Delta t} \approx 0.02 \cdot (L_m - L(t))$

Momentane Änderungsrate: $L'(t) = 0.02 \cdot (L_m - L(t))$

Exakte Lösung: $L(t) = 200 \cdot (1 - e^{-\frac{2 \cdot t}{100}})$

Die Zeit für das Erreichen von 90% der maximalen Lernstoffmenge ist :

zeros (200*(1 - *e*^(-2*t / 100)-180, t) $\Rightarrow$ { 50 ln (10) } $t \approx 115$

4. EINE KÜHLE COLA

Eine warme Cola wird in den Kühlschrank gestellt. Nach welcher Zeit kann man sie trinken ?

(Nach [7])

Modellierung (siehe: Nachsalzungsmodell)

Die Temperaturabnahme in einem kleinen Zeitintervall ist proportional zur Temperaturdifferenz und zur Länge des Zeitintervalls Δt. Die Temperatur im Kühlschrank ist konstant.

Temperatur im Kühlschrank. $T_E = 4\,°C$

Temperatur der Cola: $T_0 = 20°\,C$

Trinktemperatur: $T_1 = 6°\,C$

Temperatur der Cola zur Zeit t: $\vartheta(t)$ $\vartheta(0) = T_0 = 20°\,C$

Temperaturabnahme im Intervall [t, t+Δt]: $\vartheta(t+\Delta t) - \vartheta(t) \approx -k\,[\vartheta(t) - T_E]\,\Delta t$

$k = 3\ h^{-1}$

Mittlere Temperaturänderungsrate: $\dfrac{\vartheta(t+\Delta t)-\vartheta(t)}{\Delta t} \approx -k\,[\vartheta(t) - T_E]$

Momentane Temperaturänderungsrate: $\vartheta'(t) = -k\,[\vartheta(t) - T_E]$

Exakte Lösung: $\vartheta(t) = T_E + (T_0 - T_E)\,e^{-kt}$

5. NEUE BANKNOTEN

Die neuen 20-er Noten werden gegen die alten Noten ausgetauscht. Aus Erfahrung weiss man, dass nach 2 Monaten jeweils 80 % der sich noch im Umlauf befindlichen Noten ausgetauscht werden. Wann sind 99% der Noten ausgetauscht ?

Modellierung analog zum Lernvermögen

6. TRICHTER

Ein Trichter ist mit Wasser gefüllt. Nach welcher Zeit ist er leer ?

Modellierung (siehe: Entleeungsmodell)

Vereinfachung: Der Trichter ist ein Kegel mit dem Grundkreisradius R = 20 cm und der Höhe h=50 cm. Der Einfüllstutzen hat einen inneren Radius r = 1 cm. Im Stutzen ist kein Wasser.

Höhe des Wasserspiegels zur Zeit t: $y(t)$ $\quad y(0) = h$

Abflussgeschwindigkeit [cm s^{-1}]: $v(t) = 20\sqrt{5 \cdot y(t)}$ cm / s $\quad$ Gesetz von Torricelli

Volumenabnahme im Trichter: $\Delta V \approx [\,y(t+\Delta t) - y(t)\,]\pi\left(\frac{R}{h}y(t)\right)^2$

Abgeflossenes Volumen: $\Delta V \approx \pi r^2 v(t)\Delta t = \pi r^2 \sqrt{2000\, y(t)}\,\Delta t$

Mittlere Änderungsrate: $\dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx -\left(\dfrac{rh}{R}\right)^2 \sqrt{2000}\; y^{-3/2}(t)$

Momentane Änderungsrate: $y'(t) = -\left(\dfrac{rh}{R}\right)^2 \sqrt{2000}\; y^{-3/2}(t)$

Exakte Lösung: $y(t) = \left[h^{5/2} - \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{rh}{R}\right)^2 \sqrt{2000}\; t\right]^{2/5}$

7. STAUSEE I Liegende Dreieckspyramide

Das Wasser eines Stausees muss abgelassen werden. Der Stausee hat näherungsweise die Form einerDreieckspyramide. Die Talsohle ist eine Kante und die Talsperre ist die Grundfläche der Pyramide. Nach welcher Zeit ist der Stausee leer ?

Modellierung (siehe: Entleerungsmodell)

Maximaler Seespiegel:	Länge a = 1500 m	Stirnbreite b =300 m
Maximale Tiefe:	Höhe h= 150 m	
Abflussquerschnitt:	$q = 1\ m^2$	

Höhe des Wasserspiegels zur Zeit t: $y(t)$ $\quad y(0) = h$

Abflussgeschwindigkeit : $v(t) = 2\sqrt{5 \cdot y(t)}$ m / s $\quad$ Gesetz von Torricelli

Wasserspiegelfläche zur Zeit t: $A(t) = \dfrac{b}{2h}\, y(t)\, \dfrac{a}{h}\, y(t) = \dfrac{ab}{2h^2}\, y^2(t)$

Volumenabnahme im Stausee: $\Delta V \approx [\,y(t+\Delta t) - y(t)\,]\; A(t)$

Abgeflossenes Volumen: $\Delta V \approx q\, v(t)\,\Delta t = 2\, q\, \sqrt{5 \cdot y(t)}\,\Delta t$

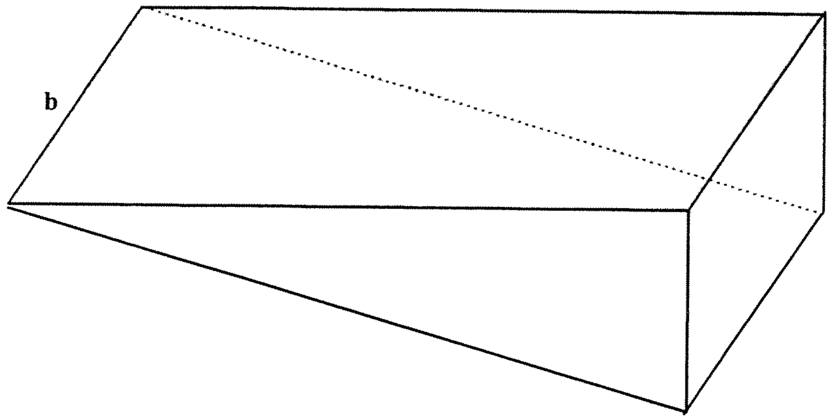
Mittlere Änderungsrate: $\dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx -\dfrac{4 \cdot q \cdot h^2}{a \cdot b}\sqrt{5}\; y^{-3/2}(t)$

Momentane Änderungsrate: $y'(t) = -\dfrac{4 \cdot q \cdot h^2}{a \cdot b}\sqrt{5}\; y^{-3/2}(t)$

Exakte Lösung: $y(t) = \left[h^{5/2} - \dfrac{10 \cdot q \cdot h^2}{a \cdot b}\sqrt{5}\; t\right]^{2/5}$

8. STAUSEE II Liegendes Dreiecksecksprisma

Das Wasser eines Stausees muss abgelassen werden. Der Stausee hat näherungsweise die Form eines liegenden Dreiecksecksprismas. Der Seespiegel ist ein Rechteck, die Uferwände sind vertikal und der Seegrund steigt gleichmässig bis zum Seespiegel an. Nach welcher Zeit ist der Stausee leer ?



Modellierung (siehe: Entleerungsmodell)

Maximaler Seespiegel:	Länge a = 1500 m ;	Breite b =300 m
Maximale Tiefe:	Höhe h= 150 m	
Abflussquerschnitt:	$q = 1\ m^2$	

Höhe des Wasserspiegels zur Zeit t: $y(t)$ $\quad y(0) = h$

Abflussgeschwindigkeit : $v(t) = 2\sqrt{5 \cdot y(t)}$ m / s Gesetz von Torricelli

Wasserspiegelfläche zur Zeit t: $A(t) = b\,\frac{a}{h}\,y(t)$

Volumenabnahme im Stausee: $\Delta V \approx [\,y(t+\Delta t) - y(t)]\ A(t)$

Abgeflossenes Volumen: $\Delta V \approx q\,v(t)\,\Delta t = 2\,q\sqrt{5\,y(t)}\,\Delta t$

Mittlere Änderungsrate: $\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \approx -\frac{2\cdot q\cdot h}{a\cdot b}\sqrt{5}\,y^{-1/2}(t)$

Momentane Änderungsrate: $y'(t) = -\frac{2\cdot q\cdot h}{a\cdot b}\sqrt{5}\,y^{-1/2}(t)$

Exakte Lösung: $y(t) = \left[h^{3/2} - \frac{3\cdot q\cdot h}{a\cdot b}\sqrt{5}\,t\right]^{2/3}$

2. Ableitung

2.1 Einführung

PROBLEM:* *Velo - Blitzstart
Welche Geschwindigkeiten erreicht man mit einem Rennvelo während der Startphase? Wie steht es mit der Beschleunigung ?

MODELLIERUNG (Experiment mit konstanter Übersetzung)
Bei einem Test wurden in bestimmten Abständen die Zeiten gemessen.

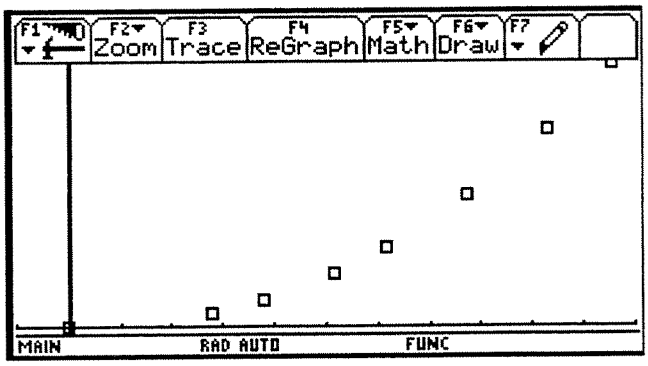
Weg in m: s	0	5	10	20	30	50	75	100
Zeit in sec: t	0	2.78	3.79	5.15	6.17	7.74	9.27	10.54

Mit dem Computer (TI-92 als Black-Box) bestimmen wir zuerst näherungsweise die Funktion[5] $s:\ t \mapsto s(t)$
Dazu geben wir die Daten als Listen ein.

{ 0, 2.78, 3.79, 5.15, 6.17, 7.74, 9.27, 10.54} -> t
{ 0, 5, 10, 20, 30, 50, 75, 100} -> s
Newplot 1 , 1, t , s

◆ [WINDOW]
xmin=-1 xmax=11 ymin=-1 ymax=100

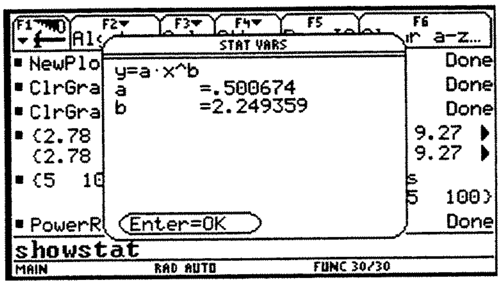
◆ [GRAPH]



Das Punktediagramm legt den Ansatz des Modell $s = a\,t^b$ nahe. Für dieses Modell ist $t = 0$ beim TI-92 nicht erlaubt. Es ist zum vornherein $s(0) = 0$ definiert. Wir müssen die Datenlisten korrigieren.

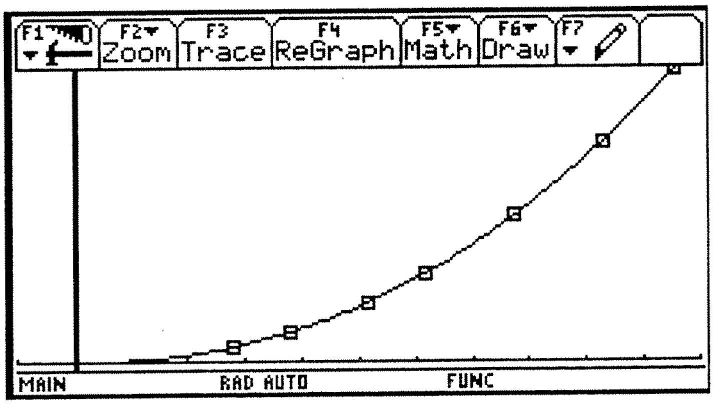
{ 2.78, 3.79, 5.15, 6.17, 7.74, 9.27, 10.54} -> t
{ 5, 10, 20, 30, 50, 75, 100} -> s

PowerReg t , s
ShowStat ⇒
RegEq (x) -> y1(x)
NewPlot 1 , 1, t , s
◆ [GRAPH] (Punktediagramm mit dem Graph)



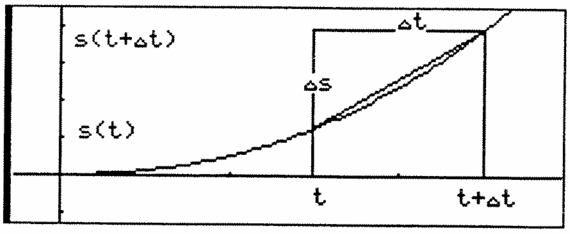
Für die weiteren Untersuchungen verwenden wir das leicht vereinfachte Modell :

$$s(t) = \frac{1}{2}\, t^{\frac{9}{4}} \qquad (1)$$



[5] Beim Versuch ist t die abhängige und s die unabhängige Variable; die Vertauschung ist aber nicht wesentlich

Die mittlere Geschwindigkeit in einem sehr kleinen Zeitintervall [t , t + Δt] ist die mittlere Änderungsrate des Weges s :



DelVar t , s
tt^(9 / 4) / 2 -> s (tt) ⇒ Done
(s (t1+Δt1) - s (t1)) / Δt1 -> vm (t1 , Δt1)

vm (t , Δt) $\Rightarrow \dfrac{(t+\Delta t)^{9/4} - t^{9/4}}{2\,\Delta t}$

Bemerkungen
- Eingabe von Δ: [◆] [G] [↑] [D]
- Bei der Definition und dem Aufruf einer Funktion darf man nicht die gleiche Variable verwenden.

INTERPRETATION
Die mittlere Geschwindigkeit vm (t, Δt) ist die STEIGUNG DER SEKANTE IM INTERVALL [t , t + Δt].

DARSTELLUNGEN DER MITTLEREN ÄNDERUNGSRATE **vm(t , Δt)** :

1. **Tabelle**
   [MODE] Graph -> 1: FUNCTION [ENTER] [ENTER]
   vm (2,x) -> y1(x)

   [◆] [Y=] y2(x)=vm (4,x)
   y3(x)=vm (6,x)
   y4(x)=vm (8,x)

   [◆] [F] Axes ......OFF-> 2: AXES

   [◆] [TblSet] tblStart: 0. 35 Δtbl :- 0.05

   [◆] [TABLE]

   [◆] [TblSet] tblStart: 0. 07 Δtbl :- 0.01

   [◆] [TABLE] usw.

x	y1	y2	y3	y4
.35	2.9725	6.7145	10.951	15.552
.3	2.9296	6.6641	10.896	15.492
.25	2.8869	6.6138	10.84	15.433
.2	2.8443	6.5637	10.785	15.373
.15	2.8019	6.5136	10.73	15.314
.1	2.7597	6.4636	10.675	15.255
.05	2.7176	6.4137	10.619	15.195
0.	undef	undef	undef	undef

x=.35
MAIN RAD AUTO FUNC

x	y1	y2	y3	y4
.07	2.7344	6.4337	10.641	15.219
.06	2.726	6.4237	10.63	15.207
.05	2.7176	6.4137	10.619	15.195
.04	2.7092	6.4038	10.608	15.183
.03	2.7008	6.3938	10.597	15.172
.02	2.6925	6.3839	10.586	15.16
.01	2.6841	6.3739	10.575	15.148
0.	undef	undef	undef	undef

x=.07
MAIN RAD AUTO FUNC

   INTERPRETATION
   Die Resultate aus der Tabelle lassen vermuten, dass für Δt -> 0 die Grenzwerte von vm (t, Δt) mit t= 2, 4, 6 , 8 existieren.

2. **3D-Graph**
   [MODE] Graph ....FUNCTION-> 5: 3D [ENTER] [ENTER]
   vm (x,y) -> z1(x,y)

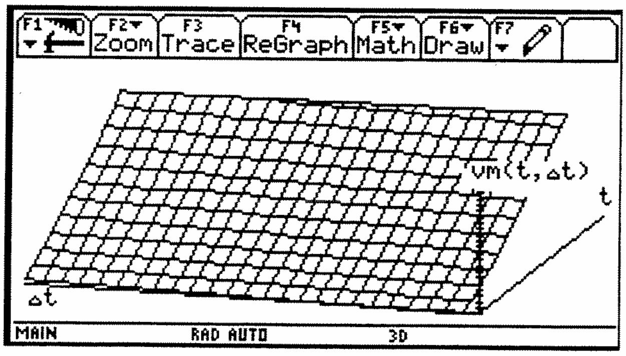
   [◆] [Y=]

   [◆] [F] Axes ....OFF-> 2: AXES

   [◆] [WINDOW]

   eyeθ°= -165 eyeϕ°=50
   xmin=0 xmax=12 xgrid=1 (= t)
   ymin=0 ymax=1. 5 ygrid=25 (= Δt)
   zmin=0 zmax=20 (= vm(t, Δt))
   [F2] 6: ZoomStd

   [◆] [GRAPH]



   INTERPRETATION:
   - der Graph von vm (t, Δt) ist eine Fläche
   - dass der Graph von vm (t, Δt) für Δt = 0 existiert, kann man vermuten, aber nicht sicher erkennen.

ZOOM-Operation I

Die mittlere Geschwindigkeit (mittlere Änderungsrate des Weges) in immer kleineren Intervallen:
Bezeichnung für den TI-92: $y1(x) = s(t)$

Wir legen die Sekanten durch den Punkt P (2 , y1(2)) und einen 2. Punkt, der immer näher an P heranrückt.

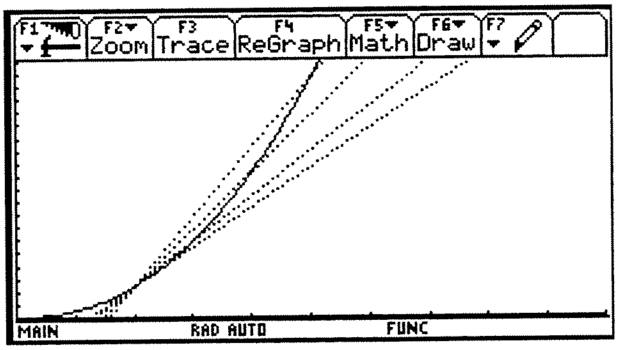
Gerade durch zwei Punkte P (2 , y1 (2)) und Q (5 , y1 (5)): $y2(x) = \dfrac{y1(5) - y1(2)}{5-2}(x-2) + y1(2)$

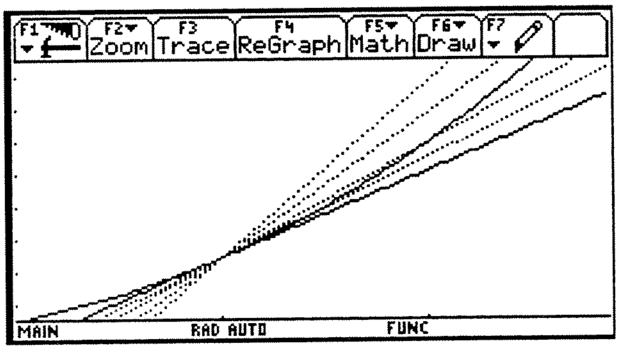
[Y=]

y1 (x)=x^(9/4) /2	
y2 (x)=(y1 (5)-y1 (2))/3*(x-2)+y1 (2)	F6 2: Dot
y3 (x)=(y1 (4)-y1 (2))/2*(x-2)+y1 (2)	F6 2: Dot
y4 (x)=(y1 (3)-y1 (2))/1*(x-2)+y1 (2)	F6 2: Dot
y5 (x)=(y1 (2.5)-y1 (2))/0.5*(x-2)+y1 (2)	F6 2: Dot

[WINDOW]
xmin=0 xmax=10 ymin=0 ymax=20

[GRAPH]

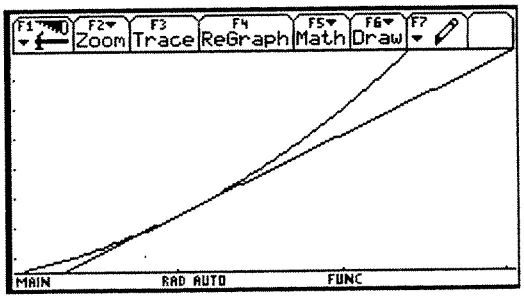




[F2] Zoom 1: ZoomBox
↖ xc:1.01
↘ xc:3.86

[F5] Math [A]: Tangent 2
⇒ y = 2.67572 x - 2.97302 (Tangente)

ZOOM-Operation II



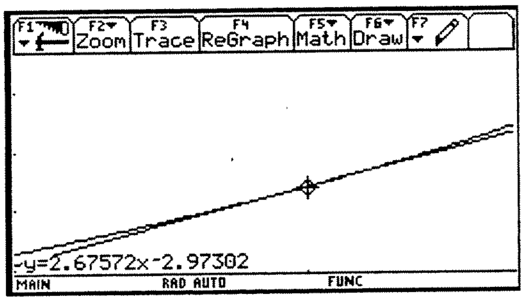
[Y=] y2 ,..., y5 löschen

[WINDOW]
xmin=0 xmax=10 ymin=0 ymax=20

[GRAPH]

[F2] Zoom 1: ZoomBox ↖ xc:1.01
↘ xc:4.04

[F5] Math [A]: Tangent 2
⇒ y = 2.67572 x - 2.97302 (Tangente)



[F2] Zoom 1: ZoomBox ↖ xc:1.51
↘ xc:2.34

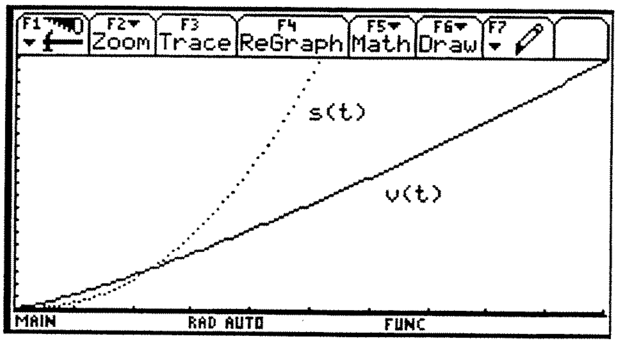
[F5] Math [A]: Tangent 2
⇒ y = 2.67572 x - 2.97302 (Tangente)

Feststellung:
In einer kleinen Umgebung von P(2 , y1 (2)) ist die Tangente eine gute Näherung für den Graphen von y1 (x).

Momentane Geschwindigkeit :
Die momentane Geschwindigkeit v(t) zum Zeitpunkt t ist der Grenzwert der mittlere Geschwindigkeit vm (t, Δt), für Δt -> 0 , falls dieser Grenzwert existiert.

Limit (vm (t, Δt), Δt, 0) $\Rightarrow \dfrac{9\,t^{5/4}}{8}$

Es gilt also : $v(t) = \dfrac{9\,t^{5/4}}{8}$



INTERPRETATION
Die momentane Geschwindigkeit (momentane Änderungsrate des Weges) zum Zeitpunkt t ist gleich der **STEIGUNG DER TANGENTE AN DER STELLE t** des Graphen von s.

Momentane Beschleunigung:
Die momentane Beschleunigung a (t) zum Zeitpunkt t ist der Grenzwert der mittleren Änderungsrate der Geschwindigkeit v (t) für Δt -> 0.

$\dfrac{9\,tt^{5/4}}{8}$ -> v (tt) $\Rightarrow$ Done **Limit** ((v (t+ Δt)-v(t)) / Δt , Δt, 0) $\Rightarrow \dfrac{45\,t^{1/4}}{32}$

Beachte: Für die Definition und den Aufruf einer Funktion darf nicht die gleiche Variable verwendet werden (Error: Circular definition). Wir verdoppeln daher bei der Definition einer Funktion jeweils den letzten Buchstaben der Variablennamen.

Es gilt also : $a(t) = \dfrac{45\,t^{1/4}}{32}$

PROBLEM: Raketenstart

Ein Raketenstart kann mit der Funktion h : $t \mapsto t^3 / 6$ [m] beschrieben werden. Welche Geschwindigkeiten erreicht die Rakete während der Startphase? Wie steht es mit der Beschleunigung ?

CAS - Befehle

Grenzwert : **limit** (Funktionsterm, Variable, Punkt [, Richtung])

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \le 1 \\ x+1 & \text{sonst} \end{cases}$

when (x ≤ 1 , x, x+1) -> f (x)		$\Rightarrow$	Done
linksseitiger Grenzwert:	**limit** (f (x), x , 1, -1)	$\Rightarrow$	1
rechtsseitiger Grenzwert:	**limit** (f (x), x , 1, 1)	$\Rightarrow$	2
beidseitiger Grenzwert:	**limit** (f (x), x , 1)	$\Rightarrow$	undef

Differenzenquotient: **avgRC** (Funktionsterm, Variable [, h]) (**a**varage **r**ate **o**f **c**hange)
Wird h weggelassen, so wir für h der Wert 0.001 eingesetzt.

Beispiel: $\dfrac{9\,t^{5/4}}{8}$ -> v (t) $\Rightarrow$ Done

avgRC (v (t), t, Δt) $\Rightarrow \dfrac{9\cdot((t+\Delta t)^{5/4} - t^{5/4})}{8\cdot \Delta t}$

2.2 Grundlagen

THEORIE (Traditionelle Bearbeitung)

Grundlagen:
- Differenzenquotient - mittlere Änderungsrate
- Differentialquotient - die lokale Änderungsrate
- Ableitungen der elementaren Funktionen
- Linearität der Ableitung
- Ableitungsfunktion
- Beziehung: Ableitung - Stammfunktion
- n-te Ableitung

Grundfertigkeiten:
- Ableitungen einfacher Funktionen mathematisch herleiten.
- Ableitungsfunktion skizzieren.
- Linearität bei der Ableitung von Funktionen einsetzen.
- Stammfunktionen einfacher Funktionen bestimmen.

Bemerkungen:
- Das CAS sollte man jeweils erst einsetzen, wenn die SchülerInnen den Grundgedanken erfasst, und beim Lösen einfacher Probleme eine gewisse Grundfertigkeit erreicht haben.
- Auf die Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) könnte man verzichten. Man darf aber dann keine grosse manuelle Fertigkeit bei der Bestimmung von Stammfunktionen erwarten.

Bei der Erarbeitung der Grundlagen kann der TI-92 zur Veranschaulichung und zur Vertiefung der Theorie eingesetzt werden.

2.2.1 CAS - Ableitungen

CAS -Herleitung: Ableitungen elementarer Funktionen

ALLGEMEIN :

Gegeben : Funktion f : x $\mapsto$ y

Funktionsterm -> f (xx) $\Rightarrow$ Done	**Definition der Funktion f**
(f (x + δx)-f(x)) / δx -> q (x , δx) $\Rightarrow$ Done	**Differenzenquotient - mittlere Änderungsrate**
Limit (q (x , δx), δx , 0)	**Ableitung: Differentialquotient - lokale Änderungsrate**

Bemerkungen
- Für die Definition und den Aufruf einer Funktion darf nicht die gleiche Variable verwendet werden, wenn der Aufruf nicht identisch mit der Definition ist (Error: Circular definition). Wir verdoppeln daher bei der Definition einer Funktion jeweils den letzten Buchstaben der Variablennamen.
- δ erhält man mit [◆] [G] [↑] [d][6]. Vereinfachung : dx verwenden

BEISPIELE:

- $f(x) = x^n$
  xx^n -> f (xx) $\Rightarrow$ Done
  (f (x + δx) - f (x)) / δx -> q (x , δx)
  Limit (q (x , δx), δx , 0) $\Rightarrow \dfrac{n\,x^n}{x}$
  $\mathbf{f'(x) = (x^n)' = n\,x^{n-1}}$
- $f(x) = \sin x$
  sin(xx) -> f (xx) $\Rightarrow$ Done
  (f (x +dx)-f (x)) / dx -> q (x , dx)
  Limit (q (x , dx), dx , 0) $\Rightarrow$ cos (x)
  $\mathbf{f'(x) = (\sin x)' = \cos x}$
- $f(x) = x^{p/r}$
- $f(x) = a^{\wedge}(x)$
- $f(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \ln(x)$

Aufgaben:
CAS Herleitungen für die Ableitungen von :
tan (x) , arcsin (x), arccos (x), arctan (x), log (x)

[6] Vorsicht: Δx ist eine Systemvariable. Die Verwendung der Variablen kann zu Problemen führen.

Demonstrationsbeispiel für das Programmieren einer einfachen Funktion:

Funktion erzeugen:

- Taste [APPS] 7: Program Editor 3: New... Type: Program -> Function
  Variable: ableiten

- Das Programm eintippen

```
ableiten ( funk, xv )
func
  local  dax, xx
  return limit ( ((funk |xv=xx+dx)- ( funk |xv =xx))/dx, dx, 0 )
endfunc
```

[HOME] Aufruf des Programms
PARAMETER:
funk : Funktionsterm f (xv)
xv: Funktionsvariable

Aufruf:
ableiten (x*sin(x),x) ⇒ xx· cos(xx)+ sin(xx)

CAS - Ableitungsbefehl *d* (f (x) , x)

Für die Ableitung muss man die Tasten 2nd [*d*] verwenden.

***d*(sin** (x) , x) ⇒ cos (x)

sin (b * t) * *e*^(- a * t) ->[7] w (t, a , b) ⇒ Done
d (w(t, a, b) , t) ⇒ b cos (b t) e^{-at} - a sin (b t) e^{-at}

ANWENDUNG: Bestimme den Schnittwinkel der Graphen von f: $x \mapsto e^{-x}$ und $g : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

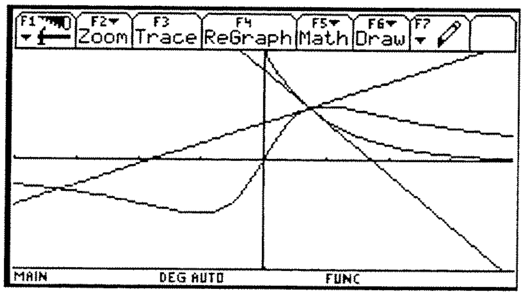
e^(- xx) -> f (xx) ⇒ Done
xx / (xx^2 + 1) -> g (xx) ⇒ Done

zeros (f (x) - g (x) , x) -> x0
x0[1] -> xo

d(f (x) ,x *)* | x = xo -> mf;
d(g (x) ,x *)* | x = xo-> mg

TAN^{-1} **(abs (** (mf-mg) / (1 -mf*mg))) ⇒ 31.4895
bzw. Im Bogenmass ⇒ 0.549595

mf * (x - xo) + f (xo) -> tf (x) ⇒ Done
mg * (x - xo) + g (xo) -> tg (x) ⇒ Done



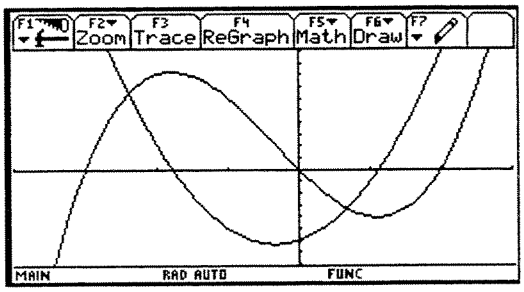
[WINDOW] xmin= - 4 xmax=4
ymin= - 1 ymax= 1
[HOME]
graph { f (x) , g (x) , tf (x) , tg (x) }

Bemerkung: Die Tangenten können auch mit [F5] Math A : Tangent im Grafikbildschirm gezeichnet werden

[7] Es lohnt sich alle Parameter anzugeben: Σ (v^i, i, 0, n) -> f (n) und f (∞) | v= 3 / 4 ⇒ undef
Σ (v^i, i, 0, n) -> g (v,n) und g (v , ∞) | v= 3 / 4 ⇒ 4

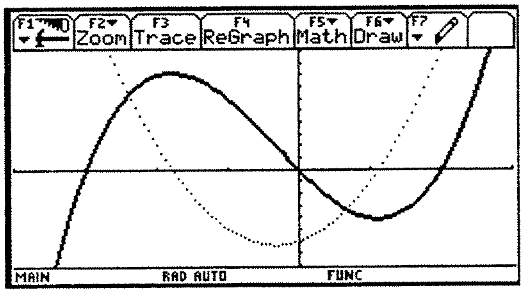
CAS - Ableitungsfunktion

Der Graph der Funktion f: x $\mapsto$ $x^3 + x^2 - 6x$ und der Graph der Ableitungsfunktion f ' sollen im gleichen Koordinatensystem dargestellt werden.



1. Variante
ClrGraph
x^3 + x^2 -6*x -> f (x) $\Rightarrow$ Done
d (f (x) , x) -> df (x) $\Rightarrow$ Done
◆ [WINDOW] xmin= - 4 xmax=3
ymin= - 8 ymax=10
◆ [HOME] **graph** { f (x) , df (x) }

Problem: Einige Operationen in Menü [F5] [MATH] ergeben fälschlicherweise „NO SOLUTION"



2. Variante
ClrGraph
◆ [Y =] y1(x) = x^3 + x^2 -6*x [F6] 4: Thick
y2(x) = *d* (y1(x) , x) [F6] 2: Dot
◆ [GRAPH]

Aufgaben

Stelle die Graphen der Funktion f und ihre Ableitungsfunktion f ' mit dem TI-92 dar.
a) $f(x) = x^2 - 2x - 4$ b) $f(x) = ½x^3 - 5x + 2$ c) $f(x) = \sin x + 1$

Definiere mit dem CAS die Funktion f, bestimme deren Ableitungfunktion f ' und stelle die beiden Graphen dar.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \\ x^2 & \text{falls } 0 \le x \le 2 \\ 4x - 4 & \text{falls } x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \\ \sin(x) & \text{falls } 0 \le x \le \pi \\ (x - \frac{3}{2}\pi)^2 - \frac{\pi^2}{4} & \text{falls } x > \pi \end{cases}$

Kontrolliere mit dem CAS die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen :
a) $y' = -a\,y$ $y = b\,e^{-ax}$ b) $(y')' = y'' = -y$ $y = A \sin x + B \cos x$

2.2.2 CAS - Höhere Ableitungen *d*(f (x) , x , n)

Bemerkung: Die n-te Ableitung einer Funktion kann nicht allgemein aufgerufen werden.

Untersuche die Ableitungen von f: $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$

$\dfrac{xx}{1-xx}$ -> f (xx) $\Rightarrow$ Done

d(f (x) , x , 1) $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ *d*(f (x) , x , 2) $\Rightarrow$ $\dfrac{-2}{(x-1)^3}$

d(f (x) , x , 3) $\Rightarrow$ $\dfrac{6}{(x-1)^4}$ *d*(f (x) , x , 4) $\Rightarrow$ $\dfrac{-24}{(x-1)^5}$

Vermutung : $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}\,n!}{(x-1)^{n+1}}$

Beweis mit vollständiger Induktion:

(-1)^(nn+1) * nn ! / (xx-1)^(nn+1)-> af (xx, nn) $\Rightarrow$ Done

Verankerung:

af (x , 0) $\Rightarrow$ $\frac{-1}{x-1}$ **falsch !**

af (x , 1) $\Rightarrow$ $\frac{1}{(x-1)^2}$ **richtig !**

Vererbung:

af (x , n + 1) - **comdenom(** ***d*** (af (x , n) , x)) $\Rightarrow$ 0 **richtig !**

dh. $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' \quad \forall \ n \geq 1$

Aufgaben

Bestimme die n-te Ableitung von f und beweise die Vermutung.

a) $f : x \mapsto x e^x$ b) $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ c) $f : x \mapsto \sin x \cos x$ e) $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$

Erweiterungen:

- **CAS - Einseitige Ableitungen**

abs (sin (xx **))** -> f (xx) mittlere Änderungsrate: **avgRC (** f (x), x , h **)** $\Rightarrow$ $\frac{|\sin(x+h)| - |\sin(x)|}{h}$

linksseitige Ableitung: **limit (avgRC(**f (x), x, h), h, 0, -1)) | x = 0 $\Rightarrow$ - 1

rechtsseitige Ableitung: **limit (avgRC(**f (x), x, h), h, 0, 1)) | x = 0 $\Rightarrow$ 1

- **CAS - numerische Ableitung**

nDeriv (f (x) , x , h) $\Rightarrow$ $\frac{-(|\sin(x-h)| - |\sin(x+h)|)}{2h}$

2.2.3 CAS - UNTERSUCHUNG zur *Produktregel*

Leite mit dem CAS ab :
$\sin x \; e^x \quad \Rightarrow$ ______________________

Folgerung: Welche naheliegende Regel gilt sicher **nicht** ?

____

____

Bestimme mit dem CAS die Ableitungen der folgenden Funktionen.

Funktion:	Ableitung:
$h(x) = x^3 \sin x$	
$h(x) = x^2 e^x$	
$h(x) = \cos x \; \ln x$	
$h(x) = \sqrt[3]{x^2}\, e^x$	

Finde und formuliere eine Regel. Zerlege dazu h in 2 Funktionen f und g .

VERSUCH: ____

____

Produktregel:

Überprüfe die Vermutung an den folgenden Beispielen:

Funktion:	Vermutung (Regel)	Ableitung mit CAS
$h(x) = x^3 \ln x$		
$h(x) = x^2 \cos x$		
$h(x) = \cos x \; \sin x$		
$h(x) = \sqrt[5]{x^3} \; x^4$		

Mathematischer Beweis:

____

____

Bemerkungen:
limit (...) funktioniert nicht für $f(x)\,g(x)$
d (f(x)*g(x)), x) liefert direkt die Produktregel, aber das ist natürlich kein Beweis

Die Quotienten- und Ketttenregel können analog eingeführt werden.

2.2.4 CAS - UNTERSUCHUNG zur Differenzierbarkeit

Es gibt Funktionen, die sind an einzelnen Stellen definiert, aber dort nicht differenzierbar. Die Sekantenbüschel bei differenzierbaren Stellen sind grundsätzlich verschieden von den Sekantenbüschel bei nicht differenzierbaren Stellen.

Programm erzeugen:

- Taste [APPS]   7: Program Editor   3: New...   Type: Function -> Program
Variable: Diffbar

- Das Programm eintippen

```
Diffbar ( funk, x, x0)
Prgm

Local deltas, i, dx, m, y0

{2,1.75,1.5,1.25, 1,.75,.5, .25, 01}->deltas

x0-3.5->xmin : x0+3.5 -> xmax
-1.5+ funk |x=x0 -> ymin
1.5+ funk |x=x0  -> ymax

funk |x=x0->y0
ClrGraph : ClrDraw

DrawFunc  funk
Circle  x0, y0, .1

For i, 1, 8
   deltas[i]->dx
   (( funk | x=x0+dx ) - y0 ) / dx -> m
   DrawSlp x0, y0, m

   -dx->dx
   (( funk | x=x0+dx ) - y0 ) / dx -> m
   DrawSlp x0, y0, m
EndFor

EndPrgm
```

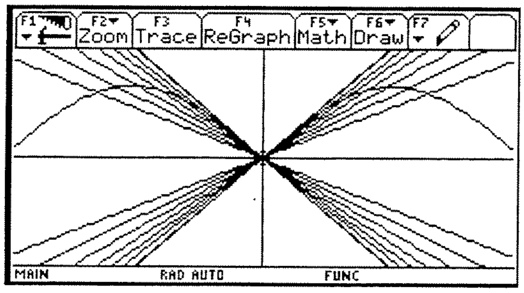
Aufruf: (im Home-Screen)

◆ [HOME]

Diffbar (ABS(sin(x)) , x , 0) [ENTER]

PARAMETER:

funk :	Funktionsterm f (x)
x :	Funktionsvariable
x0 :	Stelle



Aufgaben
Untersuche mit dem Programm die Differenzierbarkeit von

a) $f(x) = | 1/4\, x^2 - 4 |$

b) $f(x) = \sin x + | \sin x |$

Was bedeutet die Differenzierbarkeit an der Stelle x_0 anschaulich ?

Hinweis: In einem Programm kann die Strichart nicht ausgewählt werden.

Quelle: Scheuermann Hellmut und Weller Hubert, Computersoftware als methodische Hilfe bei der Begriffsentwicklung im Mathematikunterricht, erschienen in: Hirscher Horst (Herausgeber), Wieviel Termumformung braucht der Mensch?, Verlag Franzbecker, Hildesheim, 1993

2.3 Kurven

2.3.1 Kurvendiskussion mit dem CAS

Untersuchung am Beispiel $f(x) = 1/8 \cdot x^3 - ½ \cdot x^2 - 2½x + 6$

Definition: 1 / 8 * xx^3 - 1/ 2 * xx^2 - 5 / 2 * xx + 6 -> f (xx) ⇒ Done

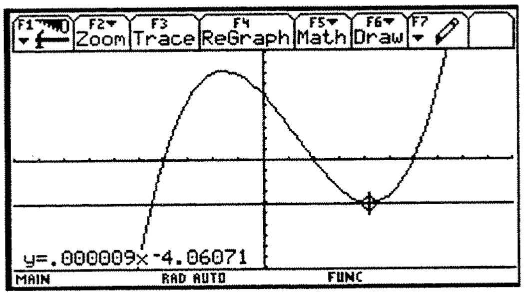
Nullstellen: **zeros** (f (x), x) ⇒ { - 4 2 6 }

Extrema: Illustration des Satzes: An den Extremalstellen des Graphen von f gilt f '(x) = 0.

Wie verlaufen die Tangenten in den Extremalpunkten?
graph f (x)
Suche Minimum und Maximum und zeichne dort die Tangenten ein:

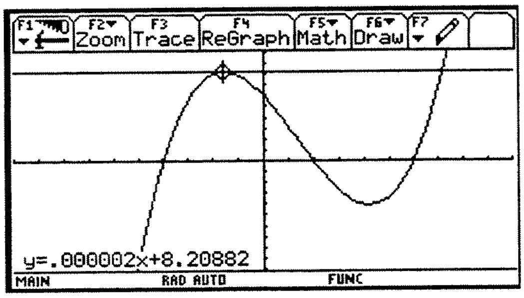
[F5] / 3: Minimum
Lower Bound? xc: 3 / Upper Bound? xc: 5
⇒ Minimum (4.23927 / –4.06067)

[F5] / [A]: Tangent Tangent at?
xc: 4.23927 ⇒ y=0.000009x–4.06071



[F5] / 4: Maximum
Lower Bound? xc: –3 / Upper Bound? xc: –1
⇒ Maximum (–1.5726 / 8.20882)

[F5] / [A]: Tangent Tangent at?
xc: –1.5726 ⇒ y=0.000002x+8.20882



Vermutung: Bei den Extrema von f ist die Tangentensteigung 0, also f '(x)=0.
Überlegung: f'(x)=0 ist sicher notwendige Bedingung für eine Extremalstelle.

Anwendung des Satzes zur exakten Berechnung der Extrema:

◆ [Home]

zeros(*d*(f (x), x), x) → extrema ⇒ $\left\{ \frac{-2(\sqrt{19}-2)}{3} \quad \frac{2(\sqrt{19}+2)}{3} \right\}$

ans(1) ◆[Enter] ⇒ {–1.5726 4.23927}

Berechnung der Funktionswerte an den gefundenen Stellen:

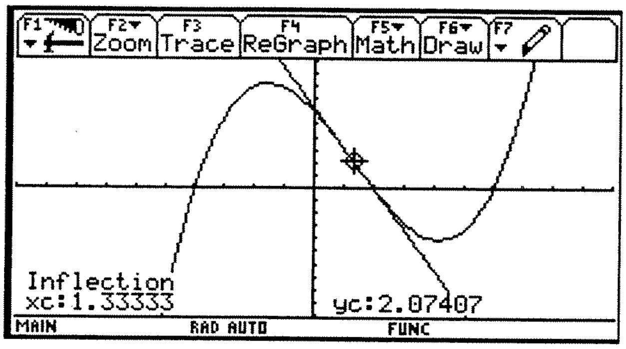
f (extrema) ⇒ $\left\{ \frac{2\left(19\sqrt{19}+28\right)}{27} \quad \frac{-2\left(19\sqrt{19}-28\right)}{27} \right\}$

ans(1) ◆[Enter] ⇒ {8.20882 –4.06067}

Wendepunkte: Klassische Herleitung des Satzes: In den Wendepunkten des Graphen von f gilt f '' (x) = 0.

Anwendung des Satzes zur exakten Berechnung des Wendepunktes:

zeros(***d*** **(** f (x), x, 2), x**)** → wendept ⇒ {4/3}
f (wendept) ⇒ {56/27}
ans(1) ◆[Enter] ⇒ {2.07407}



Direkte Bestimmung:

Graph f (x)
[F 5] / [8]: Inflection
Lower Bound ? xc: 0 [Enter]
Upper Bound ? xc: 4 [Enter]

Wendetangente:
◆ [Home]
(*d* (f (x) , x) | x=4/3)*(x-4/3)+56/27-> t (x) ⇒ Done
Graph t (x)

Programm : Kurvendiskussion

Die Kurvendiskussion kann weitgehend automatisiert werden. Mit dem folgenden einfachen Programm können rationale Funktionen diskutiert werden.

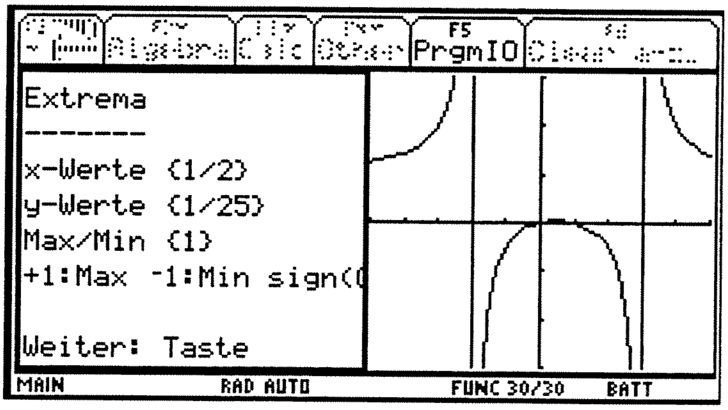
Aufruf : (im Home-Screen)

◆ [HOME]

[MODE] [F2] Split Screen .... FULL -> 3: LEFT-RIGHT

◆ [WINDOW]
xmin = -5 xmax = 5
ymin = -3 ymax = 3

kurvdisk ((x^2 - x) / (x^2 -x - 6), x)



Programm erzeugen:

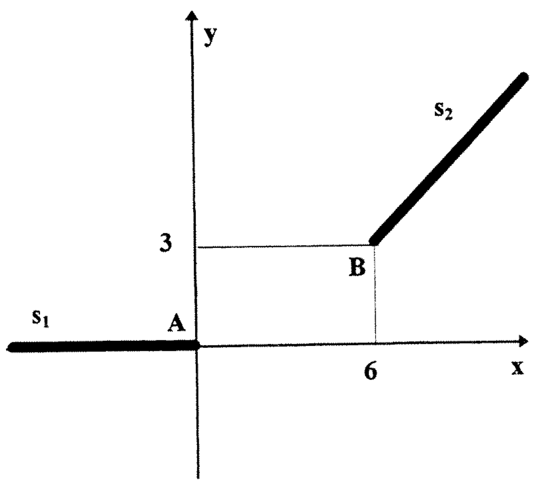
- Taste [APPS] 7: Program Editor 3: New... Type: PROGRAM ->
  Variable: kurvdisk

- Das nachfolgende Programm eintippen

```
kurvdisk ( funk, xv )
Prgm

  Local  xx, zz

  ClrIO
  ClrGraph :    ClrDraw
  DrawFunc funk |xv=x
  Disp   "Weiter : Taste"
  While  getKey()=0 :  EndWhile

  ClrIO
  zeros ( funk, xv ) -> xx
  Disp   "NULLSTELLEN:"
  Disp   "----------------------"
  Disp   xx
  Disp   " "
  Disp   "Weiter : Taste"
  While getKey()=0 :  EndWhile

  ClrIO
  zeros ( d (funk, xv ), xv ) -> xx
  Disp   "EXTREMA:"
  Disp   "----------------"
  Disp   "x-Werte  "&string ( xx )
  Disp   "y-Werte  "&string ( funk |  xv =xx )
  d ( funk ,xv, 2 ) | xv=xx  -> zz
  Disp   "Min / Max  "&string ( zz )
  Disp   "+1 : Max -1: Min    sign (0) :  Sattel
  Disp   " "
  Disp   "Weiter : Taste"
  While  getKey()=0 :  EndWhile

ClrIO
zeros ( d (funk, xv ), xv, 2 ) -> xx
Disp   "WENDEPUNKTE:"
Disp   "------------------------"
Disp   "x-Werte   "&string ( xx )
Disp   "y-Werte   "&string ( funk |  xv =xx )
Disp   " "
Disp   "Weiter : Taste"
While  getKey()=0 :  EndWhile

ClrIO
Disp   "Gebr. rat. Funktion"
Disp   "------------------------"
Disp   "ASYMPTOTEN:"
Disp   "y= .....     ( ganzer Teil von : )"
Disp   propFrac ( funk )
Disp   " "
Disp   "Weiter : Taste"
While  getKey()=0 :  EndWhile

ClrIO
Disp "Gebr. rat. Funktion"
Disp "------------------------"
Disp "POLE:"
Disp "x = "&string ( zeros(getDenom ( funk ), xv )
Disp " "
Disp "Weiter : Taste"
While  getKey()=0 :  EndWhile


EndPrgm
```

PARAMETER:
funk : Funktionsterm
xv : Funktionsvariable

2.3.2 Interpolation mit Ableitungen



Beispiel: Strassenbau
Die beiden Strassen s_1 und s_2 sollen durch ein möglichst optimales Zwischenstück miteinander verbunden werden.
s_1: $y=0$, $x \leq 0$, s_2: $y=x-3$, $x \geq 6$, A (0, 0), B (6, 3).

1. Ansatz: Verbinde A und B durch ein Geradenstück
Gerade durch A und B:

$\{0, 6\} \rightarrow$ xwerte $\Rightarrow$ Done
$\{0, 3\} \rightarrow$ ywerte $\Rightarrow$ Done
linreg xwerte, ywerte
regeq(x) $\rightarrow$ y(x) $\Rightarrow$ Done
y(x) $\Rightarrow$ $.5 \cdot x$

Dieser Weg ist nur möglich, weil der TI-92 die passende Regressionsmethode zur Verfügung stellt.

Praktischer Nachteil: Knicke bei A und B. Bei hoher Geschwindigkeit besteht erhebliche Unfallgefahr!

2. Ansatz: Verbinde A und B durch den Graphen einer Polynomfunktion:
Folgende Bedingungen sind zu erfüllen:

Anschluss bei A:	$y(0)$	$= 0$
Anschluss bei B:	$y(6)$	$= 3$
Kein Knick bei A:	$y'(0)$	$= 0$
Kein Knick bei B:	$y'(6)$	$= 1$
Keine abrupte Bewegung des Lenkrades bei A:	$y''(0)$	$= 0$
Keine abrupte Bewegung des Lenkrades bei B:	$y''(6)$	$= 0$

Es sind 6 Parameter nötig, weshalb wir mit einem Polynom 5. Grades arbeiten:

a*x^5+b*x^4+c*x^3+d*x^2+e*x+f→ y(x)	⇒ Done
y(0)=0	⇒ f=0
y(6)=3	⇒ $7776a + 1296b + 216c + 36d + 6e + f = 3$
(*d*(y(x),x) |x=0)=0	⇒ e=0
(*d*(y(x),x) |x=6)=1	⇒ $6480a + 864b + 108c + 12d + e = 1$
(*d*(y(x),x,2) |x=0)=0	⇒ 2d=0
(*d*(y(x),x,2) |x=6)=0	⇒ $4320a + 432b + 36c + 2d = 0$

Nach manuellem Vereinfachen bleibt noch folgendes Gleichungssystem übrig:

$$7776a + 1296b + 216c = 3$$
$$6480a + 864b + 108c = 1$$
$$4320a + 432b + 36c = 0$$

Lösung mit **simult** oder **rref** liefert $a = 0$, $b = -1/432$, $c = 1/36$, also $y(x) = -\frac{1}{432}x^4 + \frac{1}{36}x^3$.

Der Unterricht und die zu verwendenden Lösungsverfahren sind bei diesem Thema stark rechnerabhängig. Bei einigen CAS genügt es, den Ansatz für y(x) festzulegen und die Bedingungsgleichungen zu formulieren. Den Rest erledigt der solve-Befehl.

Aufgaben:

1. Strassenbau I: Die Autobahnen g: $y = x$ und h: $y = -x$ sollen durch ein möglichst sicheres Strassenstück miteinander verbunden werden. Das Strassenstück führt von

   a) A(1, 1) nach B(−1, 1) b) A nach C (1 ,-1)

   Bestimmen Sie die Gleichung des Verbindungsstück in den Fällen a) und b).

2. Strassenbau II: Die Strassen s_1: $y = -2$, $x \le -2$ und s_2: $y=2$, $x \ge 2$ sollen durch ein s-förmiges Stück miteinander verbunden werden. Welches ist die Gleichung dieses Verbindungsstücks?

3. Die folgende Aufgabe ist etwas speziell: Weder bei a) noch bei b) treten Ableitungen auf. Dafür führt b) auf ein nichtlineares Gleichungssystem, dessen Lösung mit dem TI-92 einige Geduld erfordert.
   Ein Kabel soll über eine 10m breite Strasse gehängt werden. Die Befestigungspunkte befinden sich auf beiden Seiten in 8m Höhe, und in der Strassenmitte ist das Kabel noch 6m über der Strasse.

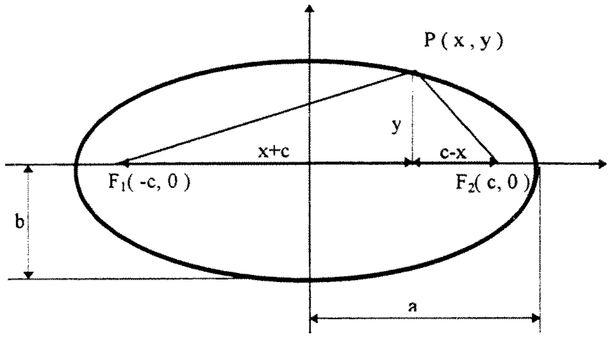
   a) Wir nehmen an, der Verlauf des Kabels werde durch ein Polynom beschrieben. Welches ist seine Gleichung? Wie lange muss das Kabel sein (das können Sie im GRAPH-Bildschirm mit F5 / B: Arc berechnen lassen)?

   b) Die Physik lehrt, dass der Verlauf des Kabels besser durch eine Funktion der Bauart $a \cdot \cosh(x / a) + b$ beschrieben wird. Welches ist seine Gleichung? Wie lange muss das Kabel sein (das können Sie im GRAPH-Bildschirm mit F5 / B: Arc berechnen lassen)?

   c) Stellen Sie die beiden resultierenden Graphen dar.

   Hinweis: Wählen Sie den Nullpunkt des Koordinatensystems genau in der Strassenmitte.

2.3.3 Ellipsengleichung



Definition :Ellipse = { P (x, y) | $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2\cdot a$ }

CAS-Herleitung:

Quadrieren:
expand ((√ (y^2+(c-x)^2) + √ (y^2+(c+x)^2) = 2*a)^2)

$$\Rightarrow 2\cdot\sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}+2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot c^2=4\cdot a^2$$

Wurzeln separieren:
ans (1) -2*x^2 -2*y^2-2*c^2

$$\Rightarrow 2\cdot\sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}=-2\cdot x^2-2\cdot y^2+4\cdot a^2-2\cdot c^2$$

Quadrieren:
expand (ans (1) ^2) -> gleich

$$\Rightarrow 4\cdot x^4+8\cdot x^2\cdot y^2-8\cdot c^2\cdot x^2+4\cdot y^4+8\cdot c^2\cdot y^2+4\cdot c^4=4\cdot x^4+8\cdot x^2\cdot y^2-16\cdot a^2\cdot x^2+ 8\cdot c^2\cdot x^2+4\cdot y^4-16\cdot a^2\cdot y^2+8\cdot c^2\cdot y^2+16\cdot a^4-16\cdot a^2\cdot c^2+4\cdot c^4$$

Ordnen:
0 = **right** (gleich) **- left** (gleich)

$$\Rightarrow \quad 0=(-16\cdot a^2+16\cdot c^2)\cdot x^2-16\cdot a^2\cdot y^2+16\cdot a^4-16\cdot a^2\cdot b^2$$

Ersetzen:
ans (1) | c^2=a^2 - b^2 $\quad\Rightarrow\quad 0=-16\cdot b^2\cdot x^2-16\cdot a^2\cdot y^2+16\cdot a^2\cdot b^2$

Vereinfachung:

propFrac (ans (1) / (16*a^2*b^2)*(-1) +1) $\quad\Rightarrow\quad 1=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ oder nur

ans (1) / (-16) + a^2*b^2 $\quad\Rightarrow\quad a^2\cdot b^2=b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2$

Implizites Differenzieren:

d (x^2 / a^2 + y(x)^2 / b^2 = 1, x) $\quad\Rightarrow\quad \dfrac{2\cdot y(x)\cdot\frac{d}{dx}(y(x))}{b^2}+\dfrac{2\cdot x}{a^2}=0$

Warning: Differentiating an equation may produce a false equation

Tangentengleichung:

(ans (1) - 2*x / a^2) * b^2 / (2*y(x)) $\quad\Rightarrow\quad \dfrac{d}{dx}(y(x))=\dfrac{-b^2\cdot x}{a^2\cdot y(x)}$

right (ans(1)) -> m(x) $\quad\Rightarrow\quad$ Done

y(x) - y(x0) - m(x0)*(x-x0)=0 $\quad\Rightarrow\quad y(x)+\dfrac{b^2\cdot x0\cdot x-a^2\cdot(y(x0))^2-b^2\cdot x0^2}{a^2\cdot y(x0)}=0$

ans (1) *a^2*y(x0) $\quad\Rightarrow\quad a^2\cdot y(x0)\cdot y(x)+b^2\cdot x0\cdot x-a^2\cdot(y(x0))^2-b^2\cdot x0^2=0$

Manuelle Vereinfachung: $\quad\Rightarrow\quad a^2\cdot y(x0)\cdot y(x)+b^2\cdot x0\cdot x=a^2\cdot b^2$

Erweiterung:
Krümmung und Krümmungsradius

2.4 Extremalwertprobleme

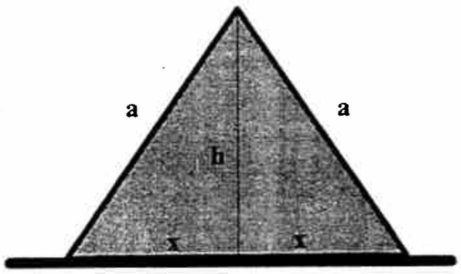
2.4.1 Zwei geometrische Extremalwertprobleme

1. PROBLEM

Aus gleichlangen Stangen (Länge a) werden die Stützen für ein Zelt hergestellt. Wie baut man damit ein optimales Zelt ? Hast du ein Vermutung für die Lösung ?

Modellierung:

Das Zelt ist etwa optimal, wenn die Querschnittfläche des Zeltes (Dreiecksprisma) maximal ist.



$f(x,h) = x\,h$ mit $h = \sqrt{a^2 - x^2}$

Bedingungen: $0 \le x \le a$

CAS - Lösungen:

√ (aa^2 - xx^2) -> h	⇒	Done	(Nebenbedingung)
xx * h -> f (xx , aa)	⇒	Done	(Extremalbedingung)

Ableiten und Nullstllen bestimmen:

zeros (***d*** (f (x , a), x) , x) ->xm ⇒ $\left\{ \frac{|a|}{\sqrt{2}} \quad \frac{-|a|}{\sqrt{2}} \right\}$

Kontrolle:

d (f (x , a), x) | x = xm[1]	◆	[Enter]	⇒	0.	
d (f (x , a), x ,2) | x = xm[1]	◆	[Enter]	⇒	- 4	rel. Maximum

Man muss die Grundlinie a $\sqrt{2}$ wählen, damit die Querschnittfläche maximal ist.
(Die 2.Lösung ist geometrisch sinnlos)

Direkte Bestimmung des Maximum:

fmax (f (x , a) , x) | a > 0 ⇒ $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

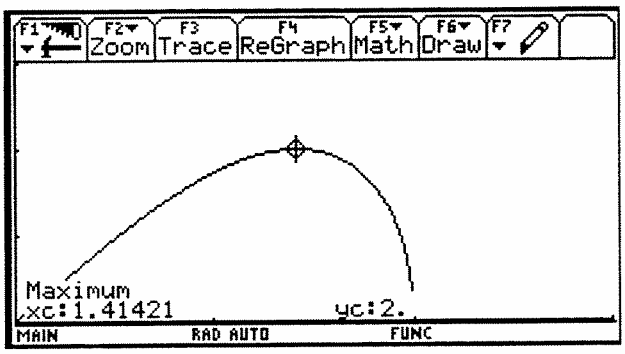
Lösung für einen konkreten Wert a = 2:

◆ [WINDOW] xmin = 0 xmax = 3
ymin = 0 ymax = 3 xres = 1

◆ [HOME]
graph f (x, 2)

[F 5] 4: Maximum
Lower Bound 1 Upper Bound 2

2. Variante : **fmax** (f (x , a) , x) | a =2



Aufgaben

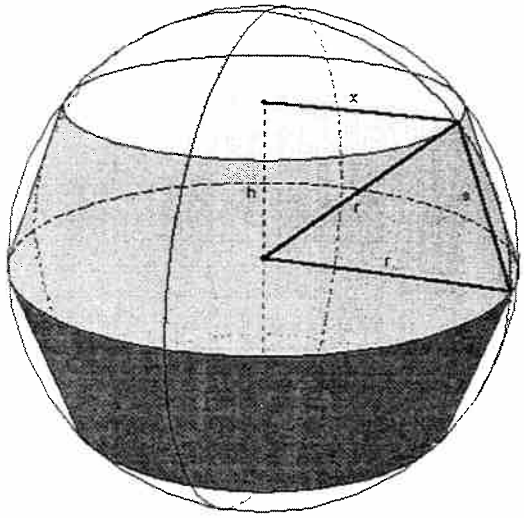
- Aus 4 gleich langen Stangen werden die Stützen für ein Zelt hergestellt, das die Form einer Pyramide hat. Wie baut man damit ein Zelt mit maximalem Volumen?

HINWEISE:

- Bei komplizierten Funktionen muss man manchmal zuerst die Ableitung vereinfachen, bevor man die Befehle **zeros** oder **solve** anwenden kann.
- Der Befehle **fmax** bzw. **fmin** funktionieren bei Funktionen mit Parametern oder bei komplizierten Funktionen nicht immer.
- Die Lösungen müssen **immer** überprüft werden.

2. PROBLEM

Einer Kugel mit dem Radius r ist ein Doppelkegelstumpf so einzuschreiben , dass die Oberfläche des Doppelkegelstumpfs maximal ist.



Tabellenbuch : $O = 2\pi s(r+x) + 2\pi x^2$

$h = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\quad s = \sqrt{h^2 + (r-x)^2}$

Bedingungen: $0 \le x \le r$

CAS -Lösungen :

√(rr^2 - xx^2) -> h (Nebenbedingung)

√(h^2 + (rr - xx)^2) -> s (Nebenbedingung)

2*π*(xx^2 + s*(rr +xx)) -> o(xx , rr) (Extremalbedingung)

Allgemeine Lösung:

fMax (o (x , r) , x) | x > 0 **and** x < r ⇒ $4 \cdot x \cdot \sqrt{-(x-r)\cdot r} - \sqrt{2}\cdot(3\cdot x - r)\cdot r = 0$ or $x = \infty$ or $x = \infty$ or $r = 0$

zeros(comdenom(*d* (o(x, r),x)), x) -> x0 ⇒ { } **Fehler !!**

Lösung für r = 1:

fMax (o (x , 1) , x) ⇒ x = - ∞ !!

o (x ,1) ⇒ $2\pi\,((x+1)\sqrt{-2(x-1)} + x^2)$

zeros(comdenom(*d* (o(x, 1),x)), x) -> x0 ⇒ { -1. . 695194 } TI-92 liefert nur *numerische* Lösungen

Lösung für r =1 mit Bereichsbegrenzung:

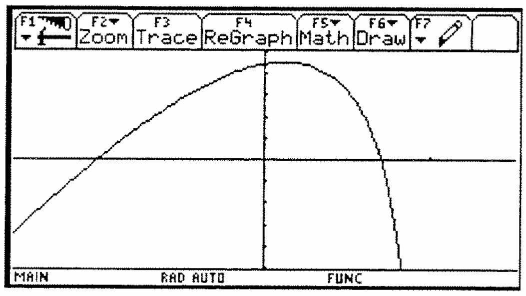
fMax (o (x , 1) , x) | x > 0 ⇒ x =. 695194 TI-92 liefert nur eine *numerische* Lösung

Untersuchung:

comdenom (***d*** (o(x , r) ,x)) ⇒ $\dfrac{4\pi\sqrt{r(r-x)}\,x + \pi\sqrt{2}\,r^2 - 3\pi\sqrt{2}\,r\,x}{\sqrt{r(r-x)}}$

comdenom (***d*** (o(x , 1) ,x)) -> o1 (x) ⇒ Done

graph o1 (x)



Es gibt mindestens 2 reelle Lösungen :

x ≈ - 1 und 0 < x < 1

Lösungsansätze:

1. Ähnlichkeit : r = 1

zeros (o1(x) , x) | x > 0-> x0 ⇒ { . 695194 }

o1 (x) | x = x0[1] ⇒ 0.

d (o(x , 1) ,x , 2) | x = x0[1] ⇒ -25.9062 rel. Max

o (x , 1) | x = x0[1] ⇒ 11.3529

Alternative:

fMax (o (x ,1), x) | x > 0->x0 ⇒ { . 695194 }

x0[1] * r -> rx ⇒ Done

o (rx , r) ⇒ $11.3529\, r^2$

2. Manuelle Umformungen

(4 √ (r*(r - x))* x = 3*r*x √ (2) - √ (2) * r ^2)^2 -> t

Warnig: Operation might introduce false solutions

zeros (**left**(t) - **right** (t) , x) | r > 0 **and** x > 0 -> x0

$\Rightarrow \left\{ \dfrac{-(\sqrt{17}-7)\,r}{16} \quad \dfrac{(\sqrt{17}+7)\,r}{16} \right\}$

d (o(x , r) ,x) | x = x0[2] **and** r > 0 ⇒ - 8. E -13 r

d (o(x , r) ,x) | x = x0[1] **and** r > 0 ⇒ 4.51902 r

x0[1] ist keine Lösung !

d (o(x , r) ,x , 2) | x= x0[2] **and** r > 0 ⇒ -25.9062 rel. Max

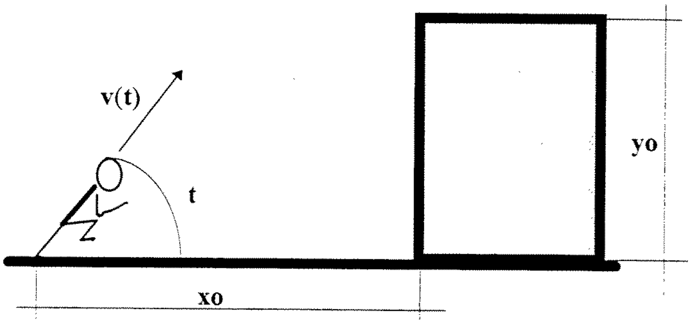
o (x0[2] , r) ⇒ $11.3529\, r^2$

Feststellungen: Die Aufgabe kann **nur** mit geometrischen oder algebraischen Kenntnissen gelöst werden. Wurzelgleichungen bereiten dem TI-92 grosse Schwierigkeiten.

2.4.2 Zwei Extremalwertprobleme aus der Physik

1. PROBLEM

Mit welcher Geschwindigkeit muss man sich abstossen, um mit min. Energie die Höhe y0 im Abstand x0 zu erreichen ? (Nach [11])
Beispiel: x0 = 4 und y0 = 3



Tabellenbuch (Physik)

Schiefer Wurf: $y = x \cdot \tan\alpha_0 - \dfrac{g}{2\, v_0^2 \cos^2 \alpha_0} \cdot x^2$

CAS -Lösung:

Wir verwenden zur Vereinfachung : $t = \alpha_0$

solve (y0=x0***tan**(t) - g*x0^2 / (2*v^2* **cos** (t)^2), v) $\Rightarrow$ $v = \dfrac{\sqrt{2 \cdot g} \cdot x0}{2 \cdot \sqrt{\cos(t)} \cdot \sqrt{-(y0 \cdot \cos(t) - x0 \cdot \sin(t))}}$ **or** ...

√ (2*g) *x0 / (2*√ (**cos**(t)) *√ (-(y0***cos**(t)-x0***sin**(t))) -> v(t) $\Rightarrow$ Done

Lösungsversuche:

fMin (v (t) ,t) $\Rightarrow$ $\cos(t) \cdot (x0 \cdot \cos(t) + y0 \cdot \sin(t)) = \dfrac{x0}{2}$ **or** ...

zeros (*d* (v (t) ,t) , t) $\Rightarrow$ { }
Warning: Solve might specify more zeros

solve(*d* (v (t) ,t) = 0 , t) $\Rightarrow$ $\cos(t) \cdot (x0 \cdot \cos(t) + y0 \cdot \sin(t)) = \dfrac{x0}{2}$ **or** ...

Ersetzung der Variablen:

ans (1) | **cos** (t) =z **and** **sin** (t) =√ (1- z^2) $\Rightarrow$ $2 \cdot y0 \cdot z \cdot \sqrt{-(z^2-1)} + x0 \cdot (2 \cdot z^2 - 1) = 0$ **or** ...

solve (ans (1) , z) $\Rightarrow$ ***keine Auflösung !!*** *Wurzelproblem des TI-92*

Manuelle Hilfe:
(2· y0· z· √ (- (z^2 - 1)) = -x0 · (2· z² -1)) | ^2 $\Rightarrow$ $-4 \cdot y0^2 \cdot z^2 \cdot (z^2 - 1) = x0^2 \cdot (2 \cdot z^2 - 1)^2$
Warning: Operation might introduce false solutions

solve (ans (1) , z) $\Rightarrow$ $z = \dfrac{\sqrt{2 \cdot (\sqrt{x0^2 + y0^2} + y0)}}{2 \cdot (x0^2 + y0^2)^{1/4}}$ **or**

$z = \dfrac{-\sqrt{2 \cdot (\sqrt{x0^2 + y0^2} + y0)}}{2 \cdot (x0^2 + y0^2)^{1/4}}$ ***sicher keine Lösung!***

Kontrolle:
(2· y0· z· √ (- (z^2 - 1)) + x0 · (2· z² -1)) | z =√ 2* (√ (x0^2+y0^2) +y0)) / (2*(x0^2+y0^2)^(1/4))

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{\sqrt{x0^2 + y0^2} + y0} \cdot \sqrt{\sqrt{x0^2 + y0^2} - y0} \cdot y0}{\sqrt{x0^2 + y0^2}} + \frac{x0 \cdot y0}{\sqrt{x0^2 + y0^2}} \neq 0$$

z ist keine Lösung !

Feststellung : Der solve-Befehl unterschlägt die Lösung $z = \dfrac{\sqrt{2 \cdot (\sqrt{x0^2 + y0^2} - y0)}}{2 \cdot (x0^2 + y0^2)^{1/4}}$. Das CAS betrachtet sie als komplexe Lösung.

Kontrolle: (2· y0· z· √ (- (z^2 - 1)) + x0 · (2· z² -1)) | z =√ 2* (√ (x0^2+y0^2) - y0)) / (2*(x0^2+y0^2)^(1/4))

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{\sqrt{x0^2 + y0^2} + y0} \cdot \sqrt{\sqrt{x0^2 + y0^2} - y0} \cdot y0}{\sqrt{x0^2 + y0^2}} - \frac{x0 \cdot y0}{\sqrt{x0^2 + y0^2}}$$

z ist eine Lösung !

Hinweis: Dass der Term 0 ist, muss man mit manuellen Umformungen zeigen.

Minimum:

√ (2* (√ (x0^2+y0^2) - y0)) / (2*(x0^2+y0^2)^(1/4)) ->z ⇒ Done
d (v (t) ,t ,2)
ans (1) | **cos** (t) =z **and** **sin** (t) =√ (1- z^2) ⇒ *sehr komplizierter Term ! Manuelle Vereinfachungen und Ersetzungen sind notwendig.*

Beispiel:
ans (1) | x0 = 4 **and** y0 = 3 ⇒ $10 \cdot \sqrt{2 \cdot g}$ **relatives Minimum**

Minimale Geschwindigkeit:

v (t) ⇒ $\dfrac{\sqrt{2 \cdot g} \cdot x0}{2 \cdot \sqrt{\cos(t)} \cdot \sqrt{-(y0 \cdot \cos(t) - x0 \cdot \sin(t))}}$

ans (1) | **cos** (t) =z **and** **sin** (t) =√ (1- z^2)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{g} \cdot x0 \cdot (x0^2 + y0^2)^{1/4}}{(\sqrt{x0^2 + y0^2} - y0)^{1/4} \cdot \sqrt{-(\sqrt{\sqrt{x0^2 + y0^2} - y0} \cdot y0 - x0 \cdot \sqrt{\sqrt{x0^2 + y0^2} + y0})}}$$

Manuelle Vereinfachung: $v_{min} = \dfrac{\sqrt{g} \cdot x0}{\sqrt{\sqrt{x0^2 + y0^2} - y0}}$ *Wurzelproblem des TI-92*

Beispiel: **ans** (1) | x0 = 4 **and** y0 = 3 ⇒ $2\sqrt{2 \cdot g}$

Problem : Warum liegt der Scheitel der Sprungparabel nicht im Punkt (x0 , y0) ??

Es ist : $y_{max} = \dfrac{v^2 \cdot \sin^2 t}{2 \cdot g}$ mit

$\sin t = \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{\dfrac{y0}{2 \cdot \sqrt{x0^2 + y0^2}} + 1/2}$ und $v = v_{min} = \dfrac{\sqrt{g} \cdot x0}{\sqrt{\sqrt{x0^2 + y0^2} - y0}}$

Berechnung von y_{max} :
√ (g) * x0 / √ (√ (x0^2 + y0^2) - y0) -> vmin ⇒ Done

vmin^2*(1-z^2) / (2*g) ⇒ $\dfrac{x0^2 \cdot (\sqrt{x0^2 + y0^2} + y0)}{4 \cdot \sqrt{x0^2 + y0^2} \cdot (\sqrt{x0^2 + y0^2} - y0)} \neq y0$

Beispiel: $y_{max} = \dfrac{16}{5} \neq y0 = 3$ ***unerwartet, erstaunlich !!!***

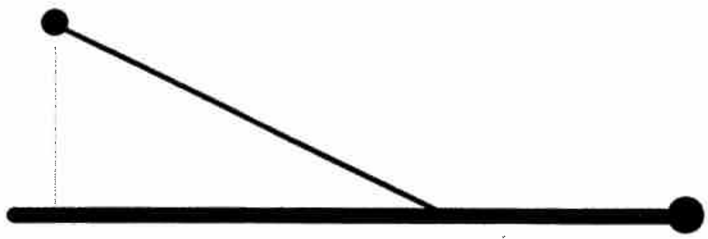
Optimale Lösung:	Scheitel in P (4 , 3) :
$v_{min} = 2\sqrt{2 \cdot g} \approx 2.828 \sqrt{g}$	$v_0 = \sqrt{\dfrac{26}{3} g} \approx 2.944 \sqrt{g}$
$t_{min} \approx 63.43°$	$t_0 \approx 56.31°$

Erklärung:
Wenn der Scheitel nicht im Punkt (x0 , y0) sein muss, kann der Winkel etwas grösser sein. Dadurch wird die Absprunggeschwindigkeit verkleinert.

Kommentar:
- Die allgemeine Aufgabe ist mit dem CAS **fast** lösbar.
- **fMin** ist auch beim Zahlenbeispiel keine Hilfe.
- Die bekannte Wurzelschwäche des TI-92 muss mit manuellen Umformungen überbrückt werden.
- Unschön ist, dass die richtige Lösung, die für das Beispiel gefunden wird, im allgemeinen Fall nicht angegeben wird.

2. PROBLEM:

Eine Autobahn, die mit der Geschwindigkeit v_A befahren werden kann, verläuft vom Punkt (0, 0) zum Punkt (c, 0). Eine Landstrasse, wo die Geschwindigkeit v_L gestattet ist, verläuft durch den Punkt (0, b). Die beiden Strassen sollen in jenem Punkt (x, 0) miteinander verbunden werden, dass die Fahrzeit von (0, b) nach (c, 0) minimal wird. (Nach [11])



CAS - Lösung:

Funktion Fahrzeit definieren: √ (b^2+x^2) / vl + (c-x)/va -> t(x) $\Rightarrow$ Done

Nullstellen der Ableitung : **zeros(** ***d*****(** t(x), x), x) $\Rightarrow \{\ \}$
Warning: Solve might specify more zeros

2. Anlauf mit solve: **solve(** ***d*****(** t(x), x) = 0, x) $\Rightarrow vl\cdot\sqrt{x^2+b^2}-va\cdot x=0$

Hilfe für den Rechner: +va*x $\Rightarrow vl\cdot\sqrt{x^2+b^2}=va\cdot x$

^2 $\Rightarrow vl^2\cdot(x^2+b^2)=va^2\cdot x^2$
Warning: Operation might introduce false solutions

3. Anlauf mit solve: **solve(ans(** 1), x)

$\Rightarrow x=-|b\cdot vl|\cdot\sqrt{\frac{-1}{vl^2-va^2}}$ **and** $\frac{b^2\cdot vl^2}{vl^2-va^2}\le 0$

or $x=|b\cdot vl|\cdot\sqrt{\frac{-1}{vl^2-va^2}}$ **and** $\frac{b^2\cdot vl^2}{vl^2-va^2}\le 0$

Diskussion:

1. $vl\ge va$ *keine reelle Lösung!* *Lösung:* $x=c$

2. $|b\cdot vl|\cdot\sqrt{\frac{-1}{vl^2-va^2}}\ge c \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{va^2-vl^2}}{vl}\le\frac{b}{c}$ *Lösung: Man wird* $x=c$ wählen.

Beispiel: $va=120\ km/h$ $vl=80\ km/h$ $\Rightarrow \frac{\sqrt{va^2-vl^2}}{vl}=\frac{\sqrt{5}}{2}\approx 1.12$

$b=12\ km$ $c=10\ km$ $\Rightarrow \frac{6}{5}=1.2$

$x\approx 10.7\ km$ *Man wird* als Lösung $x=c=10\ km$ wählen.

2.4.3 Extremalwertproblem aus der Wirtschaft

PROBLEM

Für die Lancierung eines neuen Haushaltgeräts wurden sorgfältige Untersuchungen von einem Marktforschungsinstitut und der Kalkulationsabteilung der Produktionsfirma durchgeführt. Der Verkaufspreis pro Gerät ist x Fr.

Die Marktanalyse ergab die Nachefragefunktion: $N(x) = a \cdot e^{-b\,x^2}$ $\quad a, b > 0$

Die Kalkulationabteilung berechnete die Produktionskostenfunktion: $K(x) = c + \frac{d}{N(x)}$ $\quad c, d > 0$

Bei welchem Preis x ist der Gewinn am grössten und wie gross ist dieser Gewinn?

CAS - Lösung:

a **e*^(- b*x^2) -> n (x) $\Rightarrow$ Done
c + d / n (x) -> k (x) $\Rightarrow$ Done
n(x) * (x - k (x)) -> g (x) $\Rightarrow$ Done
g (x) $\Rightarrow - (d \cdot e^{b \cdot x^2} - a \cdot (x - c)) \cdot e^{-b \cdot x^2}$

Klassischer Weg:

zeros (*d* (g (x) , x) , x) ->xe $\Rightarrow \left\{ \frac{\sqrt{b \cdot c^2 + 2} + \sqrt{b} \cdot c}{2 \cdot \sqrt{b}} \quad \frac{-(\sqrt{b \cdot c^2 + 2} - \sqrt{b} \cdot c)}{2 \cdot \sqrt{b}} \right\}$

xe[2] < 0 ist keine Lösung.

d (g (x) , x , 2) | x = xe [1] $\Rightarrow -2 \cdot a \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b \cdot c^2 + 2} \cdot e^{\frac{-\sqrt{b}\sqrt{b \cdot c^2 + 2} \cdot c}{2} - \frac{b \cdot c^2}{2} - 1/2} < 0$ **rel. Max**

g (xe [1]) -> Gewinn $\Rightarrow \frac{\left(a \cdot \left(\sqrt{b \cdot c^2 + 2} - \sqrt{b} \cdot c \right) \cdot e^{\frac{-\sqrt{b} \cdot \sqrt{b \cdot c^2 + 2} \cdot c}{2}} - 2 \cdot \sqrt{b} \cdot e^{\frac{b \cdot c^2}{2} + 1/2} \cdot d \right) \cdot e^{\frac{-b \cdot c^2}{2} - 1/2}}{2 \cdot \sqrt{b}}$

Mit dem Befehl fMax:

fmax (g (x),x) | a>0 $\Rightarrow$ x =∞ **or** x= - ∞ **or** $x = \frac{-(\sqrt{b \cdot c^2 + 2} - \sqrt{b} \cdot c)}{2 \cdot \sqrt{b}}$ **or** $x = \frac{(\sqrt{b \cdot c^2 + 2} + \sqrt{b} \cdot c)}{2 \cdot \sqrt{b}}$

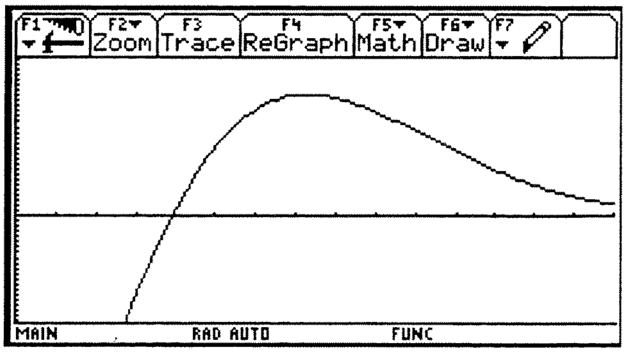
In dieser Auswahlsendung kommt nur das letzte Resultat als Lösung für unser Problem in Frage. Die zweitletzte Lösung ist negativ und ist schon deshalb keine Lösung für unser Problem.

Beispiel :

10^6->a : 2 · 10^(-4)->b: 39 -> c : 6 · 10^4 -> d
a **e*^(- b*x^2) -> n (x) $\Rightarrow$ Done
c + d / n (x) -> k (x) $\Rightarrow$ Done
n(x) * (x - k (x)) -> g (x) $\Rightarrow$ Done
zeros (*d* (g (x) , x) , x) ->xe $\Rightarrow$ [-34.168 73.168}
xe[2] $\Rightarrow$ 73.17
n (xe[2]) $\Rightarrow$ 342 765
g (xe[2]) $\Rightarrow$ 1.16516 E7
g (0) $\Rightarrow$ - 39 060 00

◆ [WINDOW]
xmin =0 xmax =150 xscl = 10
ymin=-10000000 ymax =15000000
◆ [HOME]

graph g (x)



2.5 Taylor-Reihen

ANSATZ: Eine Funktion f soll als Potenzreihe dargestellt werden.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

Untersuche mit dem CAS die 1., 2., ... n-te Ableitung von $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ an der Stelle 0

Lösung

Vereinfachung[8]: Wir brechen die Potenzreihe nach dem 20. Glied ab.

Σ (a (k) * xx ^k, k , 0 , 19) -> f (xx) ⇒ Done

d (f (x) , x, n) | x = 0 **and** n = 1 ⇒ a (1)
d (f (x) , x, n) | x = 0 **and** n = 2 ⇒ 2 a (2)
d (f (x) , x, n) | x = 0 **and** n = 3 ⇒ 6 a (3)
d (f (x) , x, n) | x = 0 **and** n = 4 ⇒ 24 a (4)
:
usw.

Vermutung: $f^{(n)}(0) = n! \cdot a(n) = n!\, a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

FOLGERUNG :

Mit $f(0) = a(0) = a_0 = \dfrac{f(0)}{0!}$ gilt:

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Taylor-Polynom:

CAS - Befehl: **taylor** (f (x) , x , n [, xo])

Beispiele: **taylor** (**sin** (x) , x , 5) ⇒ $\dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^3}{6} + x$

Mit Trick: $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$

taylor (*e* (- t) , t , 5) | t =√(x) ⇒ $\dfrac{x^2}{24} - \dfrac{x^{3/2}}{6} + \dfrac{x}{2} - \sqrt{x} + 1$

Problem: **taylor** (x /**sin** (x) , x , 4) **Wartezeit ca. 5 min**

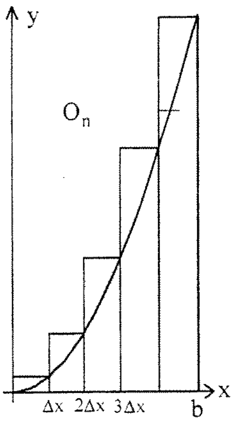
[8] Der TI-92 kann für k = 0 ... ∞ die Reihe nicht ableiten.

3. Integralrechnung

3.1 Zwei Beispiele

3.1.1 Berechnung einer Fläche

Gesucht ist der Inhalt A der Fläche unter dem Graphen von $y=x^2$ für das Intervall $0 \le x \le b$. Wir unterteilen das Intervall [0, b] in n Teilintervalle der Länge $\Delta x = b/n$ und bestimmen zunächst die Obersumme O_n, anschliessend die Untersumme U_n. Sicher gilt $U_n \le A \le O_n$.



$$O_n = \Delta x \cdot \Delta x^2 + \Delta x \cdot (2\Delta x)^2 + \Delta x \cdot (3\Delta x)^2 + \ldots + \Delta x \cdot (n\Delta x)^2 = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} (i \cdot \Delta x)^2$$

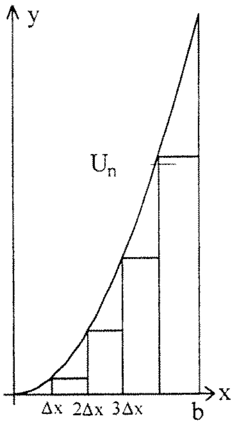
Wir berechnen diese Summe mit dem CAS. Da Δx beim TI-92 bereits als interne Variable belegt ist, schreiben wir *deltax*:

deltax * Σ((i*deltax)^2, i, 1, n) $\Rightarrow \dfrac{n(n+1)(2n+1) \cdot deltax^3}{6}$.

Nun substituieren wir $\Delta x = \dfrac{b}{n}$:

ans(1) | deltax=b/n $\Rightarrow \dfrac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

Obersumme: $\boxed{O_n = \dfrac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}}$



$$U_n = \Delta x \cdot 0^2 + \Delta x \cdot (\Delta x)^2 + \Delta x \cdot (2\Delta x)^2 + \ldots + \Delta x \cdot ((n-1)\Delta x)^2 = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i \cdot \Delta x)^2$$

Wir fassen die beiden Schritte Summenberechnung und Substitution gleich zusammen:

deltax * Σ((i*deltax)^2, i, 0, n–1) | deltax = b/n $\Rightarrow \dfrac{b^3(2n^2-3n+1)}{6n^2}$

Um dieselbe Form wie bei O_n zu erreichen, faktorisieren wir:

factor(ans(1**))** $\Rightarrow \dfrac{b^3(n-1)(2n-1)}{6n^2}$

Untersumme: $\boxed{U_n = \dfrac{b^3(n-1)(2n-1)}{6n^2}}$

Mit dieser Methode erhalten wir für jedes n zwei Näherungen für die gesuchte Fläche A: O_n und U_n.

Beispiel:
Es sei $b = 6, n = 6$. Also ist $U_6 = 55$, $O_6 = 91$. Offensichtlich sind derart ungenaue Näherungen unbrauchbar.
Wir definieren nun für die Fortsetzung zwei TI-92-Funktionen O(n,b) und U(n,b), welche für $f(x)=x^2$ jeweils die gewünschte Ober- bzw. Untersumme berechnen:

```
b^3*(n+1)*(2*n+1)/(6*n^2) → o(n,b)
b^3*(n–1)*(2*n–1)/(6*n^2) → u(n,b)
```

Erhöhung der Genauigkeit
Naheliegend ist es, n, also die Zahl der Teilintervalle, zu erhöhen. Was passiert dabei?

1. Weg (graphisch / Tabelle): Wir stellen die Graphen von O_n und U_n in demselben Koordinatensystem dar.

[MODE] Graph.....FUNCTION → 4: SEQUENCE

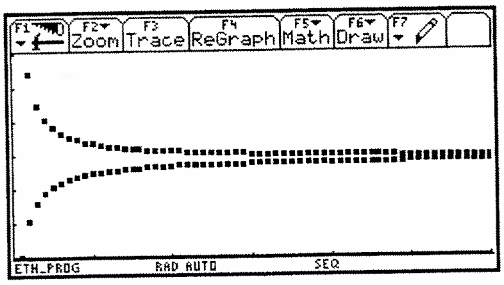
◆ [Y=]

u1(n)=o(n,6) Obersumme für [0, 6]

u2(n)=u(n,6) Untersumme für [0, 6]

[F7] Axes

Axes.... 1:TIME n auf der x-Achse, u(n,6) und o(n,6) auf der y-Achse



◆ [WINDOW]

nmin=1 nmax=60 Bereich von n

xmin=0 xmax=60 xscl=10 Bereich von n

ymin=0 ymax=150 yscl=25 Bereich von U_n, O_n

◆ [GRAPH]

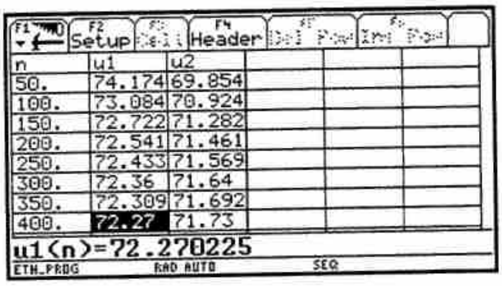
Man erkennt, dass der Abstand bzw. die Differenz zwischen den beiden Graphen für wachsendes n immer kleiner wird. Der gemeinsame Grenzwert scheint etwas unter 75 zu liegen.

Für genauere Zahlen verwenden wir die Tabellendarstellung:

◆ [TblSet] tblStart: 50 Δtbl: 50

◆ [TABLE]

Mit einiger Geduld erhält man die nebenstehenden Ergebnisse. Sie lassen einen vermuten, der gemeinsame Grenzwert beider Folgen sei 72. Jedenfalls liegt diese Zahl ziemlich genau in der Mitte zwischen den beiden Näherungen.



n	u1	u2
50.	74.174	69.854
100.	73.084	70.924
150.	72.722	71.282
200.	72.541	71.461
250.	72.433	71.569
300.	72.36	71.64
350.	72.309	71.692
400.	72.27	71.73

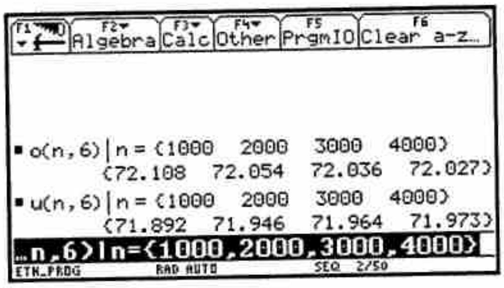
Für Ungeduldige besser geeignet, dafür weniger übersichtlich, ist folgende Variante:

◆ [HOME]

o(n,6) | n={1000, 2000, 3000, 4000} ◆ [ENTER]

u(n,6) | n={1000, 2000, 3000, 4000} ◆ [ENTER]

Auch diese Resultate deuten auf einen Grenzwert von 72 hin.



2. Weg (algebraisch): Als Mass für die Genauigkeit verwenden wir die Grösse $O_n - U_n$, da ja A zwischen O_n und U_n liegen muss. Wir berechnen daher die Differenz $O_n - U_n$ mit dem CAS:

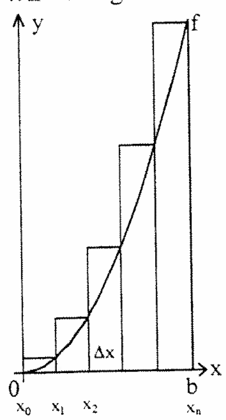
$$O(n,b) - U(n,b) \Rightarrow \frac{b^3}{n}$$

Folgerung: Je grösser n, desto kleiner der Unterschied zwischen O_n und U_n – und desto genauer sind unsere Schätzungen für die gesuchte Fläche A. Für $n \to \infty$ strebt $O(n,b) - U(n,b) \to 0$. Also bilden wir die Grenzwerte für $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \le A \le \lim\limits_{n\to\infty} O_n$ und finden mit dem CAS:

$$\textbf{limit}(U(n,b), n, \infty) \Rightarrow \frac{b^3}{3}\text{, } \textbf{limit}(O(n,b), n, \infty) \Rightarrow \frac{b^3}{3}\text{, insgesamt also } \boxed{A = \frac{b^3}{3}}$$

Die Fläche A unter der Parabel $y=x^2$ für $0 \le x \le 6$ ist also 72.

Wir verallgemeinern:



Verfahren 1 (für eine monoton steigende Funktion f):

1. Unterteile das Intervall [0,b] in n Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b}{n}$; Unterteilungspunkte x_i sind $x_i = i \cdot \Delta x$, i= 0, 1, ..., n.
2. Bestimme $O_n = \sum_{i=1}^{n} f(xi) \cdot \Delta x$ und $U_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(xi) \cdot \Delta x$
3. Falls $\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$ ist, ist die Fläche A gleich dem gemeinsamen Limes.

Die Figur illustriert den Sachverhalt für O_n, n=5. Falls f eine monoton fallende Funktion ist, sind beim 2. Schritt die Formeln für O_n und U_n zu vertauschen.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $y(x)=x^2$ für das Intervall a) [0, 1] b) [0, 3] c) [0, a] d) [6, 9] e) [−2, 3] f) [a, b]
   (Bei d), e) und f) kann der Graph von $y(x)=x^2$ eine wertvolle Hilfe bieten)
2. Leiten Sie die Formeln her für
   a) die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $y(x)=x$ für das Intervall [0, b]
   b) die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $y(x)=x^3$ für das Intervall [0, b]
3. Berechnen Sie mit Hilfe der bei 2. gefundenen Formeln
   a) die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $y(x)=x$ für das Intervall [a, b]
   b) die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $y(x)=x^3$ für das Intervall [a, b]

3.1.2 Freier Fall

Ein Körper wird im luftleeren Raum zum Zeitpunkt t=0 fallengelassen. Aus der Physik wissen wir, dass für seine Geschwindigkeit gilt $v(t)= g\cdot t$ mit $g \approx 9.81\ m\cdot s^{-2}$. Welchen Weg s legt der Körper in b Sekunden zurück?
Wir lösen diese Aufgabe gemäss Verfahren 1. Das Auftreten von g ist kein Problem für das CAS.

g*t → v(t) ⇒ Done

b/n → deltat ⇒ $\frac{b}{n}$

i*deltat → t(i) ⇒ Done

Σ(v(t(i))*deltat, i, 1, n) → o(n,b) ⇒ Done

Σ(v(t(i))*deltat, i, 0, n−1) → u(n,b) ⇒ Done

limit(o(n,b)−u(n,b), n, ∞) ⇒ 0

limit(o(n,b), n, ∞) ⇒ $\frac{b^2\cdot g}{2}$, d. h. der Körper legt in b Sekunden $s(b) = \frac{b^2\cdot g}{2}$ Meter zurück.

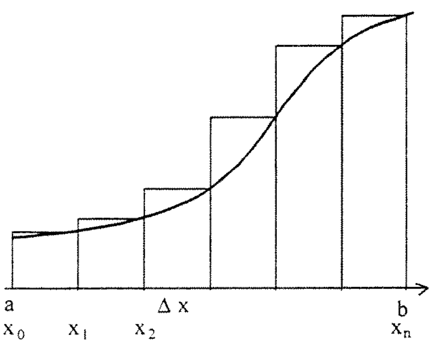
Wenn es um die Herleitung *exakter Lösungen* geht, ist das CAS nur für nicht zu komplizierte Funktionen f eine Hilfe. Hingegen kann es bei konkreten Funktionen immer für die Berechnung von *Näherungslösungen* verwendet werden.

3.2 Definition des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral wird unter Bezugnahme auf die obigen oder weitere Beispiele wie üblich definiert.

Die folgende TI-92-Funktion versucht, $\int_a^b f(x)dx$ durch Bilden des Grenzwertes der „Rechtssumme" zu bestimmen:

```
integral(ff, xv, aa, bb)
Func

Local i, n, summe

(bb – aa)/n * Σ( ff | xv = aa+i*(bb – aa)/n, i, 1, n) → summe

Return limit(summe, n, ∞)

EndFunc
```



Dabei bedeuten:
ff: Funktionsterm
xv: Unabhängige Variable der Funktion („x-Variable")
aa, bb: Unter- und Obergrenze des Intervalls

Beispiel: integral (x^2, x, 0, b) ⇒ $\frac{b^3}{3}$

Verwenden Sie diese TI-92-Funktion zur Lösung der folgenden

Aufgaben

1. $\int_0^b x^n dx = ?$ $(n \in \mathbb{N}_0)$
   Die allgemeine Lösung scheitert. Deshalb müssen Sie für n einige konkrete Werte einsetzen und versuchen, die Gesetzmässigkeit zu erkennen. Vorsicht: Die Rechenzeit nimmt mit wachsendem n zu!
2. Ebenso: $\int_a^b x^n dx = ?$
   Verwenden Sie jeweils propfrac(...), um die Resultate auf eine Form zu bringen, in der man die Gesetzmässigkeit besser erkennt.
3. Das Resultat von Nr. 2 kann man beweisen, wenn man das Ergebnis von Nr. 1 verwenden darf. Führen Sie diesen Beweis mit Hilfe einer Skizze. Nehmen Sie an, es sei $0 < a < b$.
4. Ein Körper wird im luftleeren Raum fallen gelassen. Seine Geschwindigkeit nach t Sekunden beträgt $v(t) = g \cdot t$ ($g \approx 9.81\ ms^{-2}$). Welchen Weg legt er zwischen der a-ten und der b-ten Sekunde zurück?
5. $\int_a^b e^{cx} = ?$ (Propfrac(...) nicht vergessen!)
6. Warum scheitert die Berechnung von $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ mit der vorhin programmierten TI-92-Funktion integral?
7. a) Beweisen Sie folgenden Satz:
   Es sei f eine im Intervall [a, c] stetige Funktion, und es sei $a < b < c$. Dann gilt:
   $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$
   b) Wir nehmen an, Sie haben eine Formel zur Verfügung, um $\int_0^b f(x)dx$ zu berechnen, etwa $\int_0^b f(x)dx = F(b)$.
   Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Formel $\int_a^b f(x)dx$ und beweisen Sie Ihr Resultat mit Hilfe des unter a) bewiesenen Satzes. Dabei dürfen Sie $0 < a < b$ voraussetzen.

3.3 Stammfunktionen

Klassisch: Begriff der Stammfunktion (Repetition), Begriff des unbestimmten Integrals, Integrationskonstante, elementare Eigenschaften von Stammfunktionen.

Aufgaben

Wir schlagen vor, zur Repetition der Ableitungsregeln zu einigen Funktionen von Hand Stammfunktionen suchen zu lassen und anschliessend die Resultate mit dem CAS zu kontrollieren.

Lösung mit dem CAS

Auf Ihrem TI-92 finden Sie über der Taste 7 das Integralzeichen $\int$. Tippen Sie ein:

$$\int (x\text{^}2, x)$$

Parameter: Funktionsterm
Variable, nach der zu integrieren ist

Manchmal möchten Sie auch die Integrationskonstanten C erwähnen.

$$\int (x\text{^}2, x, c)$$

Parameter: Funktionsterm
Variable, nach der zu integrieren ist
Name der Integrationskonstanten

Als Resultat erhalten Sie im obigen Beispiel die Stammfunktion $\frac{x^3}{3}+c$.

3.4 Der Hauptsatz der Differential–/Integralrechnung

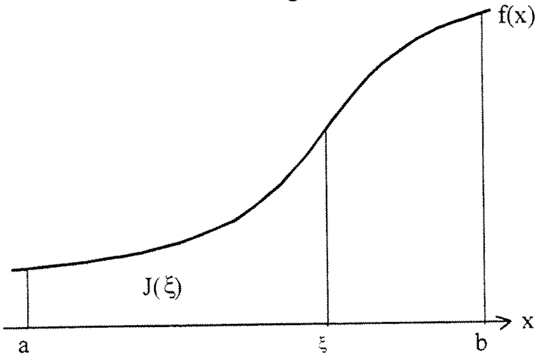
Klassische Motivation

Satz: Es sei y=f(x) eine im Intervall [a,b] stetige Funktion, y=F(x) eine beliebige Stammfunktion davon. Dann gilt:

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

(Hauptsatz der Differential–/Integralrechnung)

Beweis:
Wir studieren den Beweis am Beispiel einer monoton wachsenden Funktion f und zeigen, wie der Beweis mit dem CAS geführt werden kann. Ein Beweis ohne CAS ist aber mindestens so einsichtig.



- Wir definieren eine neue Funktion J: $J(\xi)= \int_a^{\xi} f(x)dx$

  CAS: ∫ (f(x), x, a, xii) -> j(xii)

- Wir zeigen: J ist eine Stammfunktion von f, d. h. es gilt $J'(\xi) = f(\xi)$.

  CAS: *d*(j(xi), xi) ⇒ $\lim\limits_{x \to xi} f(x)$

  Weil wir die Stetigkeit von f an der Stelle ξ vorausgesetzt haben, ist dieser Limes gleich f(ξ). J ist also eine Stammfunktion von f.

- Nach Voraussetzung ist auch F eine Stammfunktion von f ist. Deshalb gilt $J(\xi) = F(\xi) + C$.

  CAS: Wir bezeichnen die Stammfunktion von f mit g, nicht mit F. Das CAS unterscheidet nämlich nicht zwischen kleinen und grossen Buchstaben. Wir folgern also $J(\xi) = g(\xi) + C$.

- Wir berechnen die Integrationskonstante C

  CAS: **solve(** j(a)=g(a)+c, c) ⇒ c= –g(a)

- Folgerung: $J(b) = \int_a^b \mathbf{f(x)\,dx} = g(b) + C = g(b) - g(a) = \mathbf{F(b) - F(a)}$ q.e.d.

Wie üblich: Beispiel, Notation $[F(x)]_a^b$ bzw. $F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$

Verfahren 2 zur Berechnung eines bestimmten Integrals:
1. Suche eine Stammfunktion F(x)
2. Berechne $[F(x)]_a^b$ bzw. $F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Dieses Verfahren ist in manchen Fällen wesentlich einfacher als das früher vorgestellte, und es ist auch nicht mehr denselben Beschränkungen unterworfen wie unsere TI-92-Funktion integral(...)!

Lösung dieser Aufgaben mit dem CAS

1. Weg: Um das Integral $\int_0^b x^2 dx$ zu bestimmten, tippen Sie ein:

∫ (x^2, x, 0, b)

und erhalten sofort $\frac{b^3}{3}$ als Resultat.

Die einzelnen Bestandteile des Befehls: Funktionsterm
Variable, nach der zu integrieren ist
Untergrenze des Intervalls
Obergrenze des Intervalls

Wenn Unter- und Obergrenze des Intervalls feste Zahlen sind, sind noch weitere Wege möglich. Wir studieren sie wieder an demselben Beispiel.

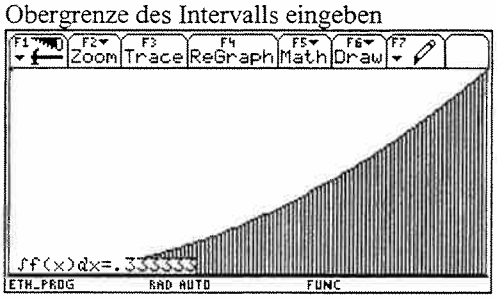
2. Weg: nint(x^2, x, 0, 1) ⇒ .333333

Das Integral wird numerisch berechnet. Die Argumente sind dieselben wie beim Befehl $\int$.

3. Weg:

clrgraph	Löschen evtl. vorhandener Graphen
graph x^2	Zeichne die zu integrierende Funktion
[F2] Zoom / 1: ZoomBox ... oder ◆[WINDOW]	Ändere bei Wunsch den Ausschnitt
[F5] Zoom / 7: $\int$ f(x)dx	Wähle den Integral-Befehl
Lower Limit? xc: 0	Untegrenze des Intervalls eingeben
Upper Limit? xc: 1	Obergrenze des Intervalls eingeben

Anschliessend schraffiert der TI-92 die Fläche, deren Inhalt er berechnet, und gibt das Resultat auf aus:



Klassisch: Eigenschaften des bestimmten Integrals (Linearität, Vertauschen der Grenzen)

Aufgaben

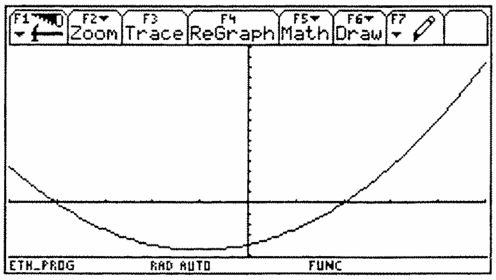
1. Beweisen Sie den Satz $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.
2. Berechnen Sie einige bestimmten Integrale von Hand und kontrollieren Sie anschliessend Ihre Lösungen mit dem CAS. Etwas überraschend verhält sich das CAS vielleicht bei $\int_0^b x^n dx$, während $\int_a^b x^n dx$ problemlos berechnt wird.
3. Beweisen Sie: a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(px)\cdot\cos(qx)dx = 0$ b) $\int_0^{2\pi} \sin(px)\cdot\cos(qx)dx = 0$

3.5 Anwendungen des bestimmten Integrals

3.5.1. Flächenprobleme

1. Fläche zwischen einem Graph und der x-Achse : Bei diesem Problem darf man *nicht* über die Nullstellen des Graphen hinwegintegrieren. Wir berechnen nun auf drei Arten die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = ½x^2 + x - 4$ und der x–Achse im Bereich $-5 \le x \le 5$.

1. Weg: Die Nullstellen von f sind –4 und 2, sodass wir die folgenden Teilflächen berechnen: für $-5 \le x \le -4$, für $-4 \le x \le 2$ und $2 \le x \le 5$.



$\int_{-5}^{-4}(\frac{1}{2}x^2 + x - 4)dx = \frac{5}{3}$	Fläche:	$\frac{5}{3}$
$\int_{-4}^{2}(\frac{1}{2}x^2 + x - 4)dx = -18$	Fläche:	18 **(plus!)**
$\int_{2}^{5}(\frac{1}{2}x^2 + x - 4)dx = 18$	Fläche:	18
Total:	**Fläche:**	$\frac{113}{3}$

Zum Vergleich: das Integral $\int_{-5}^{5}(\frac{1}{2}x^2 + x - 4)dx$ ist $\frac{5}{3}$ was besagt, dass die Flächen oberhalb der x–Achse zusammen um $\frac{5}{3}$ grösser sind als die Fläche unter der x–Achse.

2. Weg: Wir integrieren die Betragsfunktion $|f(x)|$.

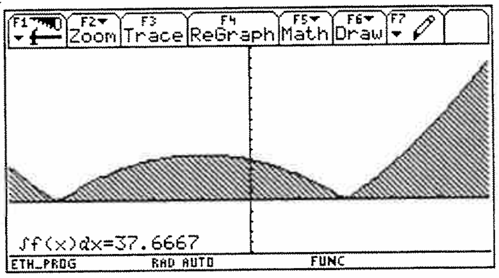
$\int$ (**abs**(x^2/2+x–4), x, –5, 5) $\Rightarrow$ 37.6667

bzw.

nint(**abs**(x^2/2+x–4), x, –5, 5) $\Rightarrow$ 37.6667

Nachteil: $|f(x)|$ ist nicht problemlos integrierbar, sodass das CAS numerische Verfahren anwendet – mit der entsprechenden (Un-)Genauigkeit.

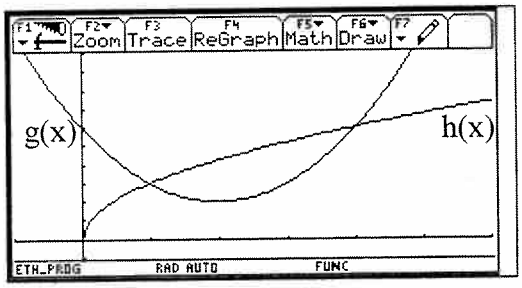
3. Weg (graphisch): Auch hier integrieren wir die Betragsfunktion



◆ [Y=]
y1(x)= **abs**(x^2/2+x–4)
◆ [GRAPH] [F5] Math
7: $\int$ f(x)dx
Lower Limit? xc: –5
Upper Limit? xc: 5
Die Fläche, deren Inhalt gesucht ist, wird schraffiert, und es wird eine Näherung für den Flächeninhalt ausgegeben.

2. Fläche zwischen zwei Graphen: Bei diesem Problem darf man nicht über Schnittstellen von f und g hinwegintegrieren. Wir zeigen anhand eines Beispiels die möglichen Lösungswege auf: Welches ist die von den Graphen der Funktionen $g(x)=x^2-4x+6$ und $h(x)=3\sqrt{x}$ sowie den Geraden $x = 0$ und $x = 5$ eingeschlossene Fläche?

1. Weg: Die folgende Figur – oder eine CAS-Rechnung – zeigt, dass sich die Graphen in den Punkten (1,3) und (4,6) schneiden. Wir berechnen also der Reihe nach:



$$\int_0^1 (g(x) - h(x))\,dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 6 - 3\sqrt{x})dx = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^4 (g(x) - h(x))dx = \int_1^4 (x^2 - 4x + 6 - 3\sqrt{x})\,dx = -5, \text{ Fläche: } +5$$

$$\int_4^5 (g(x) - h(x))\,dx = \int_4^5 (x^2 - 4x + 6 - 3\sqrt{x})\,dx = -10\cdot\sqrt{5} + \frac{73}{3}$$

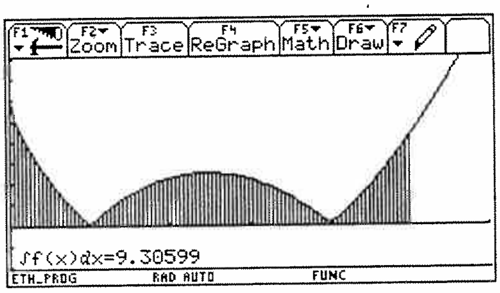
Die gesamte Fläche beträgt $-10\sqrt{5} + \dfrac{95}{3}$, also rund 9.3 Flächeneinheiten.

2. Weg: Wir integrieren $|f(x)-g(x)|$:

$\int$ (**abs**(x^2–4*x+6–3*√(x)), x, 0, 5) $\Rightarrow$ 9.30599

bzw. **nint(abs**(x^2–4*x+6–3*√(x)), x, 0, 5) $\Rightarrow$ 9.30599

3. Weg: Wir bestimmen graphisch $|f(x)-g(x)|$:



◆ [Y=]
y1(x)=abs(x^2–4*x+6–3*√(x))
◆ [WINDOW]
xmin= 0 xmax=6 xscl=1
ymin= –2 ymax=8 yscl=1
◆ [GRAPH] [F5] Math
7: $\int$ f(x)dx
Lower Limit? xc: 0
Upper Limit? xc: 5
Die gewünschte Fläche wird schraffiert, und ihr Inhalt wird näherungsweise angegeben.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Fläche, welche die Funktion $y(x) = x^2-4$ zwischen ihren Nullstellen mit der x-Achse einschliesst.
2. Welche Fläche schliessen die Funktionen sin x und cos x zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schnittstellen ein?
3. Wie gross ist der Gesamtinhalt aller Flächenstücke zwischen der x-Achse und dem Graphen von $y(x)=e^{-x}\cdot\cos x$, $x\geq 0$? a) numerische Lösung (gelingt direkt) b) exaktes Resultat (erfordert etliche Überlegungen)

3.5.2 Zwei naturwissenschaftliche Anwendungen

1. Waldschädlinge

Problem: Zum Zeitpunkt t=0 seien gewisse Schädlinge im Wald in grosser Anzahl A_0 vorhanden. Sie vermehren sich nach der Formel

$$A(t) = A_0 \cdot e^{\alpha t}, \text{ mit } \alpha>0,\ t\geq 0, \text{ t in Tagen gemessen.}$$

Wenn jeder Schädling pro Tag 3cm^2 Blattfläche vertilgt, welche Blattfläche B wird dann in 21 Tagen insgesamt von den Schädlingen gefressen? (Nach [12])

Lösung: Wir bearbeiten diese Aufgabe nach Verfahren 1 (d. h. mit Hilfe von Unter- und Obersummen).
Wir berechnen zunächst eine besonders einfache *Untersumme*. Dazu nehmen wir zunächst an, die Zahl der Waldschädlinge wäre den ganzen Tag konstant und würde um Mitternacht sprunghaft ansteigen. Dann wäre die verspiesene Blattfläche in cm^2

am 1. Tag $\quad 3\cdot A(0) = 3\cdot A_0$,

am 2. Tag $\quad 3\cdot A(1) = 3\cdot A_0\cdot e^{\alpha\cdot 1}$,

am 3. Tag $\quad 3\cdot A(2) = 3\cdot A_0\cdot e^{\alpha\cdot 2}$ usw.,

die Gesamtfläche also

$$3\,(A_0 + A_0\cdot e^{\alpha} + A_0\cdot e^{2\alpha} + \ldots + A_0\cdot e^{20\alpha}) = 3A_0\cdot\sum_{k=0}^{20} e^{\alpha\cdot k} \overset{9}{=} 3A_0\cdot\frac{e^{21\cdot\alpha}-1}{e^{\alpha}-1}.$$

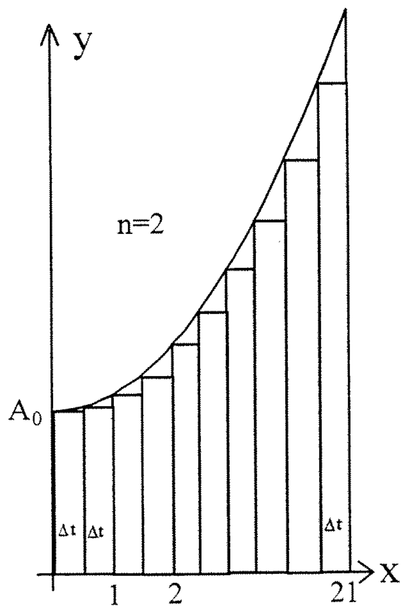
Analog finden wir für die entsprechende *Obersumme*:

$$3\,(A_0\cdot e^{\alpha} + A_0\cdot e^{2\alpha} + \ldots + A_0\cdot e^{21\alpha}) = 3A_0\cdot\sum_{k=1}^{21} e^{\alpha\cdot k} = 3A_0\cdot e^{\alpha}\cdot\frac{e^{21\cdot\alpha}-1}{e^{\alpha}-1}.$$

Da die Differenz zwischen Ober- und Untersumme ziemlich gross ist, verfeinern wir die Einteilung: Wir unterteilen jeden der 21 Tage in n Teilintervalle der Länge $\Delta t = \frac{1}{n}$ (gemessen in Tagen).

Wir erhalten so die Untersumme:

$$3\cdot A_0\cdot\Delta t\,(1 + e^{\Delta t\cdot\alpha} + e^{\Delta t\cdot\alpha\cdot 2} + \ldots + e^{\Delta t\cdot\alpha\cdot(21\cdot n-1)}).$$



Diese Summe kann mit dem CAS behandelt werden:

3*a(0)*deltat*Σ(e^(deltat*a*k), k, 0, 21*n–1)

$$\Rightarrow \frac{3\cdot e^{21\cdot n\cdot \text{deltat}\cdot\alpha}\cdot\text{deltat}\cdot a(0)}{e^{\text{deltat}\cdot\alpha}-1} - \frac{3\cdot\text{deltat}\cdot a(0)}{e^{\text{deltat}\cdot\alpha}-1}$$

Wir ersetzen die Hilfsgrösse n

ans(1) | n = 1/deltat $\quad \Rightarrow \dfrac{3\cdot\text{deltat}\cdot\left(e^{21\cdot\alpha}-1\right)\cdot a(0)}{e^{\text{deltat}\cdot\alpha}-1}$

und lassen deltat → 0 streben[10]:

limit(ans(1), deltat, 0) $\quad \Rightarrow \dfrac{3\left(e^{21\cdot\alpha}-1\right)\cdot a(0)}{\alpha}$

Die verspiesene Blattfläche B misst $3\int_0^{21} A_0\, e^{at}\, dt = \dfrac{3A_0}{\alpha}(e^{21\alpha}-1)\ \text{cm}^2$

Wenn man erkannt hat, dass es im Grunde genommen lediglich um die Berechnung eines Integrals geht, kann man genausogut die Funktion integral(...) oder den Befehl $\int$ (...) verwenden.

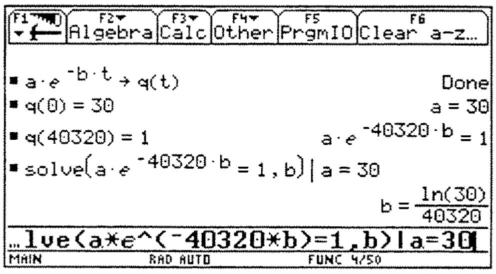
---

9 Das CAS kann diese Summe nicht vereinfachen, obwohl ein paar Glieder einer geometrischen Folge zusammengezählt werden. Die Sache klappt aber, wenn von 0. bis zum n. Glied summiert wird!

10 Wir tun dies, obwohl diese (unendliche!) Verfeinerung vom Modell her gar nicht unbedingt angebracht ist.

2. Quelle

Problem: Die Quellstärke einer Quelle geht von 30 Litern pro Minute innerhalb von 4 Wochen auf 1 Liter pro Minute zurück. Welche Wassermenge W hat die Quelle in diesem Zeitraum insgesamt ausgeschüttet, wenn man annimmt, dass die Quellstärke (d. h. die pro Minute ausgeschüttete Wassermenge) exponentiell nach der Formel $Q(t)=a\cdot e^{-b\cdot t}$, $t \geq 0$, abnimmt? (Nach [12])



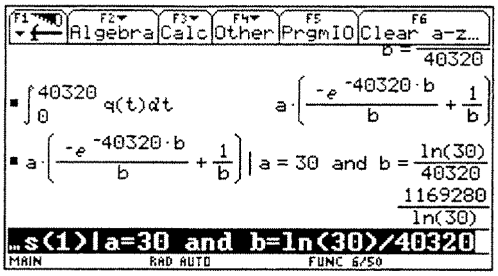
Lösung:
t messen wir in Minuten.

a*e^(–b*t) → q(t) ⇒ Done
q(0) = 30 ⇒ a=30,
q(40320)=1 ⇒ $a\cdot e^{-40320\cdot b} = 1$

Wir substituieren a=30 in der zweiten Gleichung und lösen diese nach b auf:

$$b = \frac{\ln 30}{40320}$$

Die Ein- und Ausgabe sind rechts abgedruckt.



$$W = \int_0^{40'320} Q(t)\,dt = \frac{1'169'280}{\ln(30)} \approx 343'785 \text{ Liter.}$$

Wieder sind nebenan Ein- und Ausgabe ersichtlich.

3.5.3 Die Bogenlänge einer Kurve

Klassische Herleitung: $s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Beispiel: Die Länge der Parabel $f(x)=x^2$, $0 \leq x \leq 6$ ist $s = \int_0^6 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{\ln(\sqrt{145}+12)}{4} + 3\cdot\sqrt{145} \approx 36.9197$.

Lösung mit dem CAS

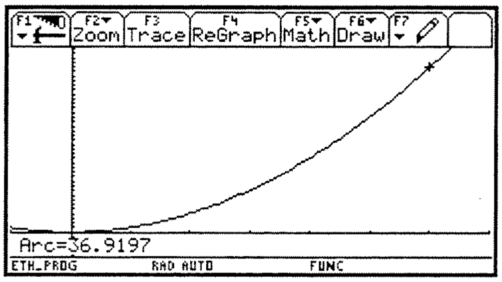
1. Weg: Zur Berechnung der Bogenlänge einer Kurve gibt es den Befehl arclen:

arclen (x^2, x, 0, 6)

Parameter:	Funktionsterm	Untere Intervallgrenze
	Variable, nach der zu integrieren ist	Obere Intervallgrenze

Als Resultat erhalten Sie im obigen Beispiel wieder $\frac{\ln(\sqrt{145}+12)}{4} + 3\cdot\sqrt{145}$.

2. Weg (graphisch):
◆ [Y=]
y1(x)=x^2
◆ [GRAPH]
[F5] Math
B: Arc
1st Point? xc: 0
2nd Point? xc: 6



3.5.4 Ergänzungen

Arbeit

Klassische Herleitung der Formel $W = \int_a^b F(x)\,dx$

Rotationskörper

Klassische Herleitung der Formeln für Volumen und Mantelfläche.

Beispiel: Die Kurve k: $y = \sin(x)\, e^{-x}$ $x \geq 0$ rotiert um die x-Achse. Das Volumen des erzeugten Körpers ist

$$\pi * \Sigma\left(\int \left((\, \mathbf{sin}(x) * e\text{^}(-x))\text{^}2, x, k*\pi, (k+1)*\pi \right), k, 0, \infty \right) \Rightarrow \frac{\pi}{8}$$

Aufgabe: Was erhält man, wenn man die Mantelfläche nicht durch Kegelstümpfe approximiert, sondern durch Zylinder?

3.6 Vermischte Aufgaben

Integral als Summe

1. Gegeben ist ein Kegel mit der Grundfläche G und der Höhe h. Dieser wird durch Ebenen parallel zur Grund fläche geschnitten.
   a) Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche in Abhängigkeit ihres Abstandes x von der Spitze des Kegels.
   b) Leiten Sie daraus durch Integration die Formel für das Kegelvolumen her.

Flächenprobleme

Bei vielen Aufgaben ist es sinnvoll, wenn Sie sich zuerst einen Überblick anhand des Graphen verschaffen.

1. Berechnen Sie die Fläche, welche die Funktion $y(x)=1-\frac{1}{4}x^2$ zwischen –2 und 4 mit der x–Achse einschliesst.
2. Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Parabel $y(x) = \pm\, 2\sqrt{x}$ und die Gerade $y(x) = 2x - 4$ begrenzt wird.
3. Bestimmen Sie die Fläche, welche von der Kurve $y(x) = \pm \sqrt{x^2 - x^4}$ umschlossen wird.
4. Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = e^{ax}$ und $f_2(x)= e^{-\frac{1}{a}x}$.
   a) Weisen Sie nach, dass die beiden Graphen zusammen mit der x–Achse eine "rechtwinklige" Fläche begrenzen, und berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
   b) Berechnen Sie den kleinsten Wert, den dieser Flächeninhalt annehmen kann.

Rotationsprobleme, Bogenlänge

1. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man das gegebene Flächenstück um die
   x–Achse dreht:
   a) $y(x) = 2x^2, 0 \le x \le 5$ b) $y^2(x) = x^4(1 - x^2)$ Skizze!
2. Beweisen Sie mit Hilfe der Integralrechnung folgende Formeln:
   a) Das Volumen eines Kegels ist Grundfläche • Höhe / 3.
   b) Umfang und Fläche des Kreises sind $2\pi r$ bzw. πr^2.
   c) Oberfläche und Volumen der Kugel sind $4\pi r^2$ bzw. $4\pi r^3/3$.

*3. Die Funktion f sei im Intervall [0, a] streng monoton wachsend. Welches ist das Volumen desjenigen Körpers, der bei der Rotation des Graphen von f um die *y-Achse* entsteht?

Naturwissenschaftliche Anwendungen

1. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ist die Kraft F, mit der sich zwei Kugeln der Masse m_1 und m_2 (bei kugelsymmetrischer Dichteverteilung) anziehen, gegeben durch
   $$F = G\,\frac{m_1\, m_2}{r^2},$$
   wobei r den Abstand der Kugelmittelpunkte bezeichnet und $G = 6.6732\cdot 10^{-11}$ die Gravitationskonstante ist.
   a) Ein Körper mit der Masse 1 kg wird von der Erdoberfläche aus 1000 km senkrecht nach oben gebracht. Welche Arbeit wird dabei geleistet?
   b) Welche Höhe erreicht dieser Körper, wenn die geleistete Arbeit doppelt so gross wie die in a) berechnete ist ?
   c) Berechnen Sie die Arbeit, die geleistet werden müsste, um die Masseneinheit 1 kg von der Erdoberfläche ins Unendliche zu transportieren. Erdradius: $6.371\cdot 10^6$ m, Erdmasse $5.976\cdot 10^{24}$ kg
2. Ein Kabel mit dem Gesamtgewicht von 50kg und einer Länge von 20m hängt von einer Rolle nach unten. Welche Arbeit wird beim Aufwickeln verrichtet?
3. Eine elektrische Vorortbahn fährt während der ersten 20 Sekunden mit einer Beschleunigung von 0.53 m/s^2, dann während der nächsten 40 Sekunden mit einer Beschleunigung von 0.20 m/s^2. Hierauf erleidet der Zug eine Verzögerung von 0.027 m/s^2 während einer Zeit von 120 Sekunden. Schliesslich wird der Zug zum Halten gebracht mit einer Verzögerung von 0.65 m/s^2.
   a) Welches ist die gesamte Fahrzeit in Sekunden? b) Welche Strecke wird dabei zurückgelegt?
   c) Welches ist die mittlere Geschwindigkeit während der ganzen Fahrt?

Erweiterungsmöglichkeiten

- Integrationsmethoden, wobei dieses Kapitel nicht mehr viel Sinn macht, weil der TI-92 auf diesem Gebiet recht gut ist.
- Analytische Lösung von Differentialgleichungen

4. Differentialgleichungen

4.1 Drei Beispiele

4.1.1 Schneeschaufeln

Am Morgen stellst man fest, dass es geschneit hat und es noch immer gleichmässig weiterschneit. Man beginnt das Trottoir freizuschaufeln. Während der 2. Stunde schafft man nur noch halb so viel wie in der 1. Stunde, obwohl man mit gleicher Kraft weitergeschaufelt hat. Wann begann es zu schneien ?
(Nach B.H. West, Setting up First-Order Differential Equations from World Problems, in M. Braun et al (Eds), Differential Equation Models, Vol 1, 1983 und [8])

Modellierung
Es geht während der beobachteten Zeit kein Schnee verloren.

b: Trottoirbreite in m
p: Schaufelleistung in kg h^{-1}
s: Schneefall in kg h^{-1} m^{-2}
t: Schaufelzeit in h
T: Zeit bevor man zu schaufeln angefangen hat und während der es schon schneite in h

Die Länge des freigeschaufeltes Trottoirstücks sei x (t).
Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion x abgeleitet werden.

Eigenschaften von x :
- $x(0) = 0$; $x(1) = 20$; $x(2) = 30$
- x wächst immer langsamer
- x ist eine *streng monoton wachsende* Funktion
- $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

Die in einem kleinen Zeitintervall [t, t+Δt] freigeschaufelte Fläche ist : $A = [\, x(t+\Delta t) - x(t)\,]\; b$

Während (t + T) Stunden fiel auf diese Fläche s Kilogramm Schnee pro Stunde und pro Quadratmeter.
Die Schneemenge, die während dieser Zeit auf die freigeschaufelte Fläche fiel ist daher:

$$W \approx A\,(t+T)\,s = [\, x(t+\Delta t) - x(t)\,]\; b\,(t+T)\,s$$

Die Schaufelarbeit in dem kleinen Zeitintervall [t, t+Δt] ist: $W = p\,\Delta t$

Es gilt nun: $[\, x(t+\Delta t) - x(t)\,]\; b\,(t+T)\,s \approx p\,\Delta t$

Daraus ergibt sich die **mittlere Schaufelgeschwindigkeit:** $\dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx \dfrac{p}{b\,s}\,\dfrac{1}{t+T} = k\,\dfrac{1}{t+T}$

Die **momentane Schaufelgeschwindigkeit** ist somit: $x'(t) = k\,\dfrac{1}{t+T}$

Dies ist eine besonders einfache Differentialgleichung, da die momentane Änderungsrate nur vom Zeitpunkt t und nicht auch noch vom Wert der Zustandsgrösse x(t) abhängt.

Die Lösung ist eine Stammfunktion von $f(t) = k\,\dfrac{1}{t+T}$

Das CAS liefert : $\int (k/(t+tt), t, c) \Rightarrow k \cdot \ln(|t+tt|) + c$

Die allgemeine Lösung ist : $F(t) = x(t) = k\,\ln(t+T) + c$

Mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ gilt : $c = -\,k\,\ln T$ Daraus folgt: $x(t) = k\,\ln\dfrac{t+T}{T}$

Die zusätzlichen Informationen $x(1) = 20$ und $x(2) = 30$ ergeben :

$20 = k\,\ln\dfrac{1+T}{T}$ und $30 = k\,\ln\dfrac{2+T}{T}$ Daraus folgt: $\dfrac{20}{30} = \ln\dfrac{1+T}{T} \,/\, \ln\dfrac{2+T}{T}$

solve (20 / 30 = **ln** ((1 + t) / t) / **ln** ((2 + t) / t), t) $\Rightarrow$ $t = \dfrac{-(\sqrt{5}+1)}{2}$ or $t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Es schneite schon ca. 37 min bevor man zu schaufeln begann (die erste Lösung ist unmöglich, da t ≥0).

AUFGABEN
- Was ändert sich, wenn x (1) = 50 m angesetzt wird ?
- Warum kann man mehr als 40 m freischaufeln ?

4.1.2 Forellenteich

Ein Zufluss vermehrt die Forellen, und ein leicht gedrosselter Abfluss vermindert die Forellen in einem Teich. Wie verändert sich der Forellenbestand ?

(Nach P.Calter,Graphical and Numerical Solution of Differential Equations, UMAP Module 81-83,1980 und [8])

MODELLIERUNG (entspricht einem Spezialfall des Entsalzungsmodells)

In dem Teich ist eine Restwassermenge von V_0= 180 hl, welche y_o= 150 Forellen enthält. Ein Zufluss führt pro Minute z=20 ℓ Wasser zu. Dadurch gelangen auch Forellen in den Teich, und zwar im Durchschnitt m=3 Stück pro 750 ℓ. Um den Teich nachzufüllen, ist der Abfluss aus dem Teich gegenüber dem Zufluss gedrosselt, er beträgt a= 18 ℓ Wasser pro Minute. Durch den Abfluss geht eine dem Volumen des Teichs entsprechende Menge Forellen verloren.

y (t) ist die Anzahl Forellen im Teich zum Zeitpunkt t (Minuten). Damit man das Problem mit Hilfe der Differentialrechnung modellieren kann, muss y (t) als kontinuierliche Variable angesehen werden. y (t) ist gewissermassen die Menge Fisch im Teich; analoges gilt auch für die Menge Fisch, die pro Minute zu - bzw. abfliesst. Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion y abgeleitet werden.

Eigenschaften von y :

- y (0) = 150 ist die Menge Fisch (Anzahl) im Teich zum Zeitpunkt 0.
- Der Zufluss bringt konstant $m \cdot z / 750 = 0.08$ Fische pro Minute in den Teich. Am Anfang gehen durch den Abfluss $a \cdot y_0 / V_0 = 0.15$ Fische pro Minute verloren. y ist daher zumindest am Anfang eine *monoton fallende* Funktion.
- Das Wasservolumen im Teich steigt aber stetig, so dass der Fischverlust vielleicht mit der Zeit abnehmen und dadurch ein Zuwachs resultieren wird. y könnte daher nach einer gewissen Zeit wieder *monoton wachsen* .

Manuelle Approximationen:

Die Zeit unterteilen wir in kleine, gleichlange Intervalle. In einem solchen Intervall nehmen wir an, dass zuerst die Fische durch den Abfluss verloren gehen und danach die Fische durch den Zufluss in den Teich kommen.

Zeitintervall : 2 Minuten

1. Zeitintervall [0, 2]

Verlust an Forellen : $2 \cdot a \cdot \frac{y(0)}{V_0} = 0.3$ Zuwachs an Forellen: $2 \cdot \frac{m}{750} z = 0.16$

Bestand nach 2 Minuten: $y(2) = y(0) - 2 \cdot a \cdot \frac{y(0)}{V_0} + 2 \cdot \frac{m}{750} \cdot z = 150 - 0.3 + 0.16 = 149.86$

2. Zeitintervall [2, 4]

Das Wasservolumen im Teich hat sich verändert. Nach 2 Minuten ist: $V(2) = V_0 + 2(z - a) = V_0 + 4 = 18004$

Verlust an Forellen : $2 \cdot a \cdot \frac{y(2)}{V(2)} = 2 \cdot a \cdot \frac{y(2)}{V_0 + 2(z-a)} = 0.2997$ Zuwachs an Forellen: $2 \cdot \frac{m}{750} \cdot z = 0.16$

Bestand nach 4 Minuten: $y(4) = y(2) - 2 \cdot a \cdot \frac{y(2)}{V_0 + 2(z-a)} + 2 \cdot \frac{m}{750} \cdot z = 149.86 - 0.2997 + 0.16 = 149.72$

Bevor wir den Computer für eine bessere Approximation einsetzten, wollen wir die Differentialgleichung herleiten und deren Bedeutung etwas genauer untersuchen.

Differentialgleichung

Wir betrachten die Änderungsrate von N in einem sehr kleinen Zeitintervall [t , t +Δt] :

Zuwachs an Forellen im Intervall [t, t+ Δt]: $\frac{m}{750} z \Delta t = \frac{2}{25} \Delta t$

Wassermenge V (t) [Liter] im Teich zur Zeit t: $V(t) = V_0 + (z - a) t = 18\,000 + 2t$

Verlust an Forellen im Intervall [t, t+ Δt]: $a \cdot \frac{y(t)}{V_0 + (z-a)t} \cdot \Delta t = \frac{9}{9000+t} y(t) \Delta t$

Forellenmenge zum Zeitpunkt t+Δt: $y(t+\Delta t) \approx y(t) + \frac{2}{25} \Delta t - \frac{9}{9000+t} y(t) \Delta t$

Die mittlere Änderungsrate der Forellenmenge ist: $\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx \frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t} y(t)$

Die **momentane Änderungsrate** der Forellenmenge ist: $y'(t) = \frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t} y(t)$ (1)

Richtungsfeld

Mathematische Deutung der Differentialgleichung:

$$y'(t) = \frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t}\,y(t) = f(t,y)$$

Jedem Punkt der (t,y)-Ebene kann man die Gerade mit der Steigung

$m(t,y) = \frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t}\,y(t)$ (die Steigung der Tangente durch den Punkt P (t, y))

zuordnen. Von dieser Geraden zeichnet man nur ein kleines Stück in der Nähe des zugehörigen Punktes. Dadurch bekommt man das sogenannte *Richtungsfeld* der Differentialgleichung.

Richtungsfeld von $y' = f(t, y)$

Mit einem kleinen Programm auf dem TI-92 kann das Richtungsfeld einer Differentialgleichung leicht und schnell erzeugt werden.

Programm erzeugen:
- Taste [APPS] 7: Program Editor 3: New... Type: PROGRAM ->
  Variable: SlpField
- Das Programm eintippen

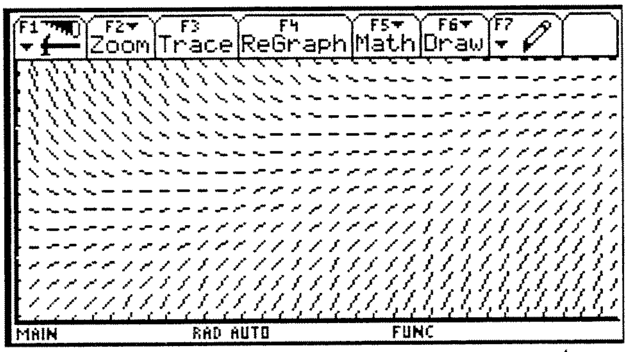
```
SlpField ( funk,tp,yp,tvon,tbis,yvon,ybis )

Prgm

Local dt, dy, dg, m, tx, yy
tvon -> xmin: tbis -> xmax
yvon -> ymin : ybis -> ymax
(tbis - tvon ) / 32 -> dt
(ybis - yvon ) / 14 -> dy
dt / 4 -> dg

ClrGraph
For tx, tvon,tbis,dt
    For yy, yvon , ybis, dy
        funk | tp=tx and yp =yy -> m
        Line tx-dg, yy-m*dg, tx+dg, yy+m*dg
    EndFor
EndFor
EndPrgm
```

Aufruf:

[HOME]
SlpField(2 / 25 - 9 / (9000 + t)*y, t, y, 0, 9000, 50, 150)

PARAMETER:

funk :	Funktionsterm f (t, y)
tp, yp :	Funktionsvariablen
[tvon, tbis] :	t-Bereich
[yvon, ybis] :	y-Bereich



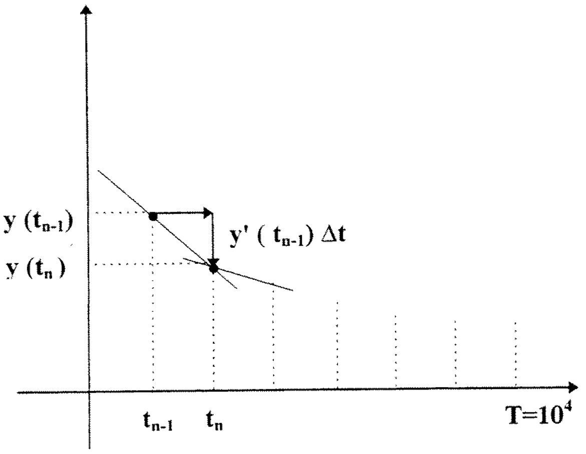
Die grundsätzliche Aufgabe ist nun offensichtlich: "Finde Kurven, die sich in das Richtungsfeld einschmiegen " oder genauer: *Finde Kurven, die in jedem ihrer Punkte tangential an das Richtungsfeld sind*.

Eine solche Kurve heisst Lösungskurve; die Funktion, deren Bild die Kurve ist, nennt man *Lösung der Differentialgleichung.*

Folgerungen:
1. Es gibt viele Lösungskurven, d. h. es gibt viele verschiedene Lösungen der Differentialgleichung.
2. Durch einen Punkt P(t_0, y_0) gibt es genau eine Lösungskurve. Das bedeutet: Kennt man zu einem Zeitpunkt den Zustand, so ist der ganze Verlauf des Prozesses, vor- und rückwärts, bestimmt.
3. Die Idee des Richtungsfeldes legt auch das Verfahren von Euler-Cauchy nahe, um von einem gegebenen Punkt aus einen neuen Punkt der Lösungskurve zu approximieren.

Approximation nach Euler-Cauchy

Für eine Differentialgleichung können wir mit einem allgemeinen Verfahren[11] Näherungslösungen bestimmen. Wir unterteilen das Zeitintervall von 0 bis z. B. T = 10000 min in nmax = 1000 Intervalle der Länge Δt. Von $y(t_0) = y(0) = 150$ ausgehend, approximieren wir schrittweise den Funktionswert von y jeweils an der nächstfolgenden Stelle.



$$t_n = n \frac{T}{nmax} = n\,\Delta t = 10\, n$$

Lineare Approximation:

$y(t_n) \approx y(t_{n-1}) + y'(t_{n-1})\,\Delta t$ und $y(t_0) = y(0) = 150$

Mit der Differentialgleichung (1) $y'(t) = \frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t}\, y(t)$ erhalten wir die sog. Euler-Cauchy Approximation:

$$\boxed{y(t_n) \approx y(t_{n-1}) + \left(\frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t_{n-1}}\, y(t_{n-1})\right)\Delta t; \qquad y(t_0) = y(0) = 150 \quad n = 1, 2, \ldots, 1000}$$

Diese Approximation ist die gleiche Approximation wie die, die wir für die manuelle Approximation und die Berechnungen im Einführungskapitel jeweils aus den Differenzengleichungen hergeleitet haben.

Verallgemeinerung

Lineare Approximation: Für $y' = f(x, y)$ ist $y(x_n) \approx y(x_{n-1}) + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,\Delta t$

Einstellung : [MODE] Graph........FUNCTION-> 4: SEQUENCE

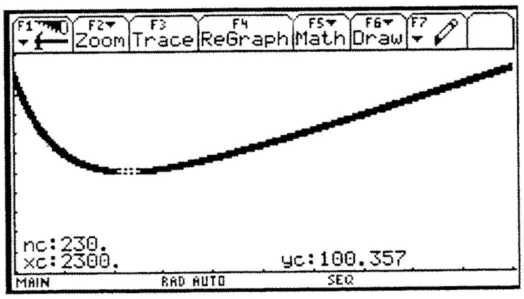
[◆] [Y=]

u1 (n) = 10*n (Zeit: t_n)
u2(n)= u2(n-1)+(2/25-9/(9000+ 10*(n-1))*u2(n-1))*10 (Bestand: $y(t_n)$)
ui2 = 150 (Bestand: $y(t_0)$)

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1 (Zeit: t_n)
Y Axis: u2 (Bestand: $y(t_n)$)

[◆] [WINDOW]

nmin = 0	nmax=1000	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=10000	(Bereich der Zeit t)
ymin=50	ymax=160	(Bereich der Funktion y)
xscl=1000	yscl=10	(Teilung der Achsen)



[◆] [GRAPH]

Feststellung: Der Fischbestand sinkt zuerst auf ca. 100 Stk. nach 2300 min. (38 h) und erholt sich nach 9740 min. (6.76 Tagen) wieder auf 150 Stk (ca. doppelte Wassermenge).

---

[11] Es gibt wesentlich bessere, aber aufwendigere Verfahren als das Verfahren von Euler-Cauchy

Richtungsfeld von y ' = f (t , y) mit der Lösungskurve durch den Punkt (t0, y0)

Mit dem Verfahren von Euler-Cauchy kann eine Näherungskurve durch einen gegebenen Punkt in das Richtungsfeld gelegt werden.

Programm erzeugen:
- Taste [APPS] 7: Program Editor 3: New... Type: PROGRAM ->
  Variable: SlopCurv
- Das Programm eintippen

```
SlopCurv ( funk,tp,yp,tvon,tbis,yvon,ybis ,t0,y0)
Prgm

Local dt, dy, dg, m, tx, yy,tx1,tx2,yy1,yy2

tvon -> xmin:  tbis -> xmax
yvon -> ymin : ybis -> ymax
(tbis - tvon ) / 32 -> dt
(ybis - yvon ) / 14 -> dy
dt / 4 -> dg

ClrGraph
For  tx, tvon,tbis,dt
   For  yy, yvon , ybis, dy
      funk | tp=tx and yp =yy  -> m
      Line tx-dg, yy-m*dg, tx+dg, yy+m*dg
   EndFor
EndFor

t0 -> tx1:  y0 -> yy1
For tx,t0,tbis,dt
   funk | tp=tx and yp=yy1  -> m
   tx+dt->tx2 :  yy1+ m*dt -> yy2
   Line tx1,yy1,tx2,yy2
   tx2 -> tx1 : yy2 -> yy1
EndFor
t0 -> tx1:  y0 -> yy1 : - dt -> dt
For tx,t0,tvon,dt
   funk | tp=tx and yp=yy1  -> m
   tx+dt->tx2 :  yy1+ m*dt -> yy2
   Line tx1,yy1,tx2,yy2
   tx2 -> tx1 : yy2 -> yy1
EndFor
EndPrgm
```

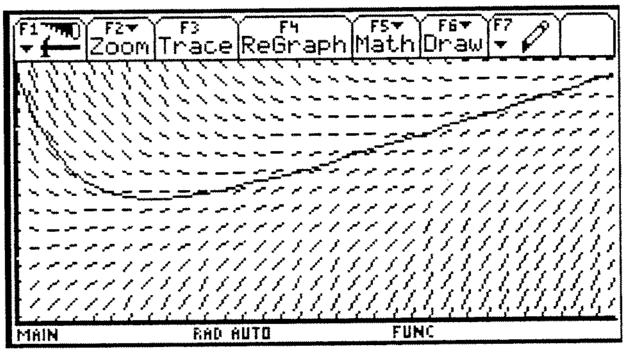
Aufruf:

◆ [HOME]

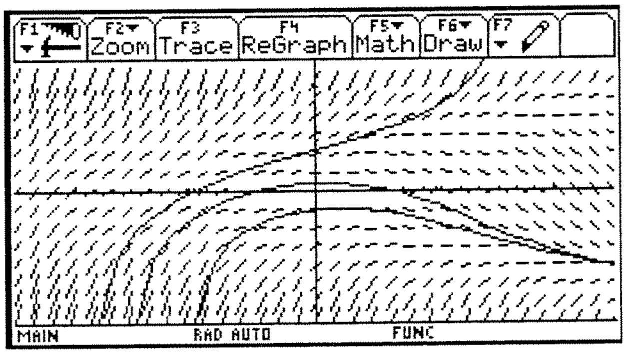
SlopCurv(2/25-9/(9000 + t)*y, t, y, 0,9000, 50, 150, 0,150)

PARAMETER:

funk	:	Funktionsterm f (t , y)
tp, yp	:	Funktionsvariablen
[tvon, tbis]	:	t-Bereich
[yvon, ybis]	:	y-Bereich
[t0, y0]	:	Kurvenpunkt



Aufgabe:
Untersuche die Lösungskurven im Richtungsfeld der Differentialgleichung : $y' = y^2 - t$



Hinweis: Verschiedene Lösungskurven kann man dadurch in das gleiche Richtungsfeld zeichnen, indem man das Programm mit verschiedenen Kurvenpunkten (t0, y0) aufruft.

Modellkritik:
- Forellen könnten vielleicht auch durch den Zufluss verloren gehen.
- Die biologische Vermehrung ist vernachlässigt.
- Wie wird der Anfangsbestand der Forellen bestimmt ?
- Die konstante Vermehrung durch den Zufluss ist problematisch.
- Man nimmt an, dass es im betrachteten Zeitraum zu keiner Überbevölkerung kommt.
- Gibt es kein Beschränkung für das Auffüllen des Teichs ?

Herleitung der exakten Lösung:

$y'(t) = \frac{m}{750} \cdot z - \frac{a}{t(z-a)+Vo} y(t)$; $y(0) = yo$ ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung.

Bestimmung der allgemeine Lösung y_h der homogenen Differentialgleichung (Separation der Variablen):

t*(z-a) + vo -> r (t) $\Rightarrow$ Done

solve($\int$ (1 / y , y) = - $\int$ (a/ r (t) , t)), y) | y > 0 $\Rightarrow$ $y = (|t(z-a)+vo|)^{\frac{-a}{z-a}}$

Lösung der homogenen Differentialgleichung: $y_h(t) = co \ r(t)^{\frac{-a}{z-a}}$

Bestimmung einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung :

Ansatz: $y_p(t) = c(t)\, y_h(t)$

r (t)^(-a/(z-a))-> yh (t) $\Rightarrow$ Done

c (t) *yh (t) -> yp (t) $\Rightarrow$ Done

d (yp (t) , t) -(z*m/750 - a / r (t) * yp (t))=0 $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}(c(t))\ (t(z-a)+Vo)^{\frac{-a}{z-a}} - \frac{z \cdot m}{750} = 0$

Manuelle Auflösung: $\Rightarrow$ $c'(t) = \frac{z \cdot m}{750}\ (t(z-a)+Vo)^{\frac{a}{z-a}} = \frac{z \cdot m}{750}\ r(t)^{\frac{a}{z-a}}$

z*m/750*r (t)^(a/(z-a))->dc (t) $\Rightarrow$ Done

$\int$ (dc (t) ,t) -> c (t) $\Rightarrow$ Done

zeros (yo - (co + c (t))* yh (t), co) | t =0 -> k $\Rightarrow$ $\left\{ \frac{-(m \cdot Vo - 100 \cdot yo) \cdot Vo^{\frac{a}{z-a}}}{750} \right\}$

(k[1] + c(t))*yh (t) -> y (t) $\Rightarrow$

$$\frac{\left(m \cdot (t(z-a)+Vo)(t(z-a)+Vo)^{\frac{a}{z-a}} - (m \cdot Vo - 100 \cdot yo)\, Vo^{\frac{a}{z-a}} \right) \cdot (t(z-a)+Vo)^{\frac{-a}{z-a}}}{750}$$

Manuelle Vereinfachung :

Allgemeine Lösung : $y(t) = \frac{m}{750}(t(z-a)+Vo) - (\frac{m}{750} Vo - yo)\left(\frac{Vo}{t(z-a)+Vo}\right)^{\frac{a}{z-a}}$

Beispiel : $y(t) = (t + 9000)/125 + 78\ (1 + t/9000)^{-9}$

Kontrolle : ***d*** (y (t), t) - z*m / 750 + a / r (t) * y (t) $\Rightarrow$ 0

4.1.3 Salzen - Entleeren

Für das Volumen und die Salzmenge im Aquarium haben wir im 1. Kapitel folgende Differentialgleichungen erhalten:

Volumen: $V'(t) = -12\sqrt{V(t)} + 18 \cdot 10^3$ mit $V(0) = 900000\ cm^3$

Salzmenge: $S'(t) = -\frac{12}{\sqrt{V(t)}} S(t) + 0.54$ mit $S(0) = 54$ kg

Die Differentialgleichung für die Salzmenge soll nun noch etwas genauer untersucht werden.

Richtungsfeld mit der Lösungskurve für die Startwerte (xt0 , yt0)

Differentialgleichungssystem :

$$x' = -12\sqrt{x(t)} + 18000 = fx(t, x)$$

$$y' = -\frac{12}{\sqrt{x(t)}} y(t) + 0.54 = fy(t, x, y)$$

Programm erzeugen:
- Taste [APPS] 7: Program Editor 3: New... Type: PROGRAM -> Variable: DiffSyst

- Das Programm eintippen

```
DiffSyst (fx, fy, tv, xv, yv,tvon,tbis,yvon,ybis,xt0,yt0)
Prgm

Local dt,dy, dg, mx,my, tx, xx,yy,tt1,tt2,yy1,yy2,
xx1, xx2

tvon -> xmin:  tbis -> xmax
yvon -> ymin : ybis -> ymax
(tbis - tvon ) / 32 -> dt
(ybis - yvon ) / 14 -> dy
dt / 4 -> dg

ClrGraph
xt0->xx
For  tx, tvon,tbis,dt
   For  yy, yvon , ybis, dy
      fy | tv=tx and yv =yy and xv=xx -> m
      Line tx-dg, yy-m*dg, tx+dg, yy+m*dg
   EndFor
   fx | tv=tx and xv=xx->mx
   xx+mx*dt->xx
EndFor

tvon -> tt1:  yt0 -> yy1: xt0->xx1
For tx,tvon,tbis,dt
   fy | tv=tx and yv=yy1 and  xt=xx1-> my
   tx+dt->tt2 :  yy1+ my*dt -> yy2
   Line tt1,yy1,tt2,yy2
   fx | tv= tx  and xv=xx1->mx
   xx1+mx*dt -> xx2; xx2 -> xx1
   tt2 -> tt1 : yy2 -> yy1
EndFor

EndPrgm
```

Aufruf:

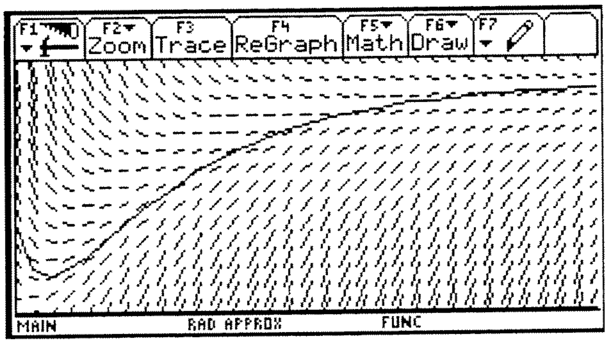
[◆] [HOME]

[MODE]
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

DiffSyst (-12*√(x)+ 18000 , -12*y/√(x)+ 0.54, t, x, y, 0,1000, 45, 75, 900000,54)

PARAMETER:

fx	:	Funktionsterm fx (t , x)
fy	:	Funktionsterm fy (t , y)
tv, xv ,yv	:	Funktionsvariablen
[tvon, tbis]	:	t-Bereich
[yvon, ybis]	:	y-Bereich
[xt0, yt0]	:	Startwerte



Hinweis: Verschiedene Lösungskurven kann man dadurch in das gleiche Richtungsfeld zeichnen, indem man das Programm mit verschiedenen Startwerten (xt0, yt0) aufruft.

Exakte Lösungen des allgemeinen Entsalzungsmodells:

Volumen : $V'(t) = -12\sqrt{V(t)} + 18 \cdot 10^3$ mit $V(0) = 900000\ cm^3$

Separation der Variablen:

$(\int (1/(18000-12*\sqrt{(v)}),v,c) = \int (1,t))\ |\ v < 2250000 \Rightarrow -250(\ln(\sqrt{v}-1500) - \frac{\sqrt{v}}{6} + c = t$

Richtig wäre : $t = -250\ \ln(1500 - \sqrt{v}) - \frac{\sqrt{v}}{6} + c$ d. h. die Bedingung wird nicht berücksichtigt !

solve (-250* ln (1500 - √ (v)) - √ (v) /6 + c = t ,c) | t=0 and v = 900000 [ENTER] $\Rightarrow$ c = 1736.19....

Die Gleichung $t = -250\ \ln(1500 - \sqrt{v}) - \frac{\sqrt{v}}{6} + 1736.19$ kann nicht nach v aufgelöst werden. Daher kann man für die Differentialgleichung **keine explizite Lösung** angeben.

Exakte Lösung des Entsalzungsmodells mit Abpumpen:

$s'(t) = \frac{p}{100} \cdot z - \frac{a}{t(z-a)+mo}\ s(t)\ ;\quad s(0) = so$ ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung.

Bestimmung der allgemeine Lösung s_h der homogenen Differentialgleichung :

t*(z-a)+mo -> r (t) $\Rightarrow$ Done

solve(∫ (1 / s , s) = - ∫ (a/ r (t) , t)), s) | s > 0 $\Rightarrow$ $s = (|t(z-a)+mo|)^{\frac{-a}{z-a}}$

Lösung der homogenen Differentialgleichung: $s_h(t) = co\ r(t)^{\frac{-a}{z-a}}$

Bestimmung einer partikulären Lösung s_p der inhomogenen Differentialgleichung :

Ansatz: $s_p(t) = c(t)\ s_h(t)$

r (t)^(-a/(z-a))-> sh (t) $\Rightarrow$ Done

c (t) *sh (t) -> sp (t) $\Rightarrow$ Done

d (sp (t) , t) -(z*p/100 - a / r (t) * sp (t))=0 $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}(c(t))\ (t(z-a)+mo)^{\frac{-a}{z-a}} - \frac{z \cdot p}{100} = 0$

Manuelle Auflösung: $c'(t) = \frac{z \cdot p}{100}\ (t(z-a)+mo)^{\frac{a}{z-a}} = \frac{z \cdot p}{100}\ r(t)^{\frac{a}{z-a}}$

z*p/100*r (t)^(a/(z-a))->dc (t) $\Rightarrow$ Done

∫ (dc (t) ,t) -> c (t) $\Rightarrow$ Done

zeros (so - (co + c (t))* sh (t), co) | t =0 -> k $\Rightarrow$ $\left\{ \frac{-(p \cdot mo - 100 \cdot so) \cdot mo^{\frac{a}{z-a}}}{100} \right\}$

(k[1] + c(t))*sh (t) -> s (t) $\Rightarrow$

$$\frac{\left(p \cdot (t(z-a)+mo)(t(z-a)+mo)^{\frac{a}{z-a}} - (p \cdot mo - 100 \cdot so)mo^{\frac{a}{z-a}}\right) \cdot (t(z-a)+mo)^{\frac{-a}{z-a}}}{100}$$

Manuelle Vereinfachung :

Allgemeine Lösung : $s(t) = \frac{p}{100}(t(z-a)+mo) - (\frac{p}{100}mo - so)\left(\frac{mo}{t(z-a)+mo}\right)^{\frac{a}{z-a}}$

Beispiel : $s(t) = 27(1 + t/450) + 45\ (1 + t/450)^{-3}$

Kontrolle : ***d*** (s (t), t) - z*p / 100 + a / r (t) * s (t) $\Rightarrow$ 0

4.2 Projekte mit Lösungsskizzen

Die Projekte werden in Zweiergruppen bearbeitet.

1. ÜBERVÖLKERUNG

Einer Population stehen für die Entwicklung nur beschränkte Ressourcen zur Verfügung. Ihre Maximalgrösse ist M. Wie wächst die Population ?

Modellierung

Anfangsbestand: $N(0) = N_0 = 10^2$

Maximaler Bestand: $M = 500$

Annahme: Der rel. Zuwachs (prozentualer Zuwachs) in einem sehr kleinen Zeitintervall Δt ist proportional zur Länge des Zeitintervalls Δt und proportional zu dem noch verbleibenden "Vermehrungsspielraum".
Der Proportionalitätsfaktor ist $k = 0.2$ pro Stunde.

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N(t)} \approx k\,(M - N(t))\,\Delta t$$

Mittlere Änderungsrate: $$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \approx k\,N(t)\,[M - N(t)]$$

Momentane Änderungsrate: $$N'(t) = k\,N(t)\,[M - N(t)]$$

Exakte Lösung: $$N(t) = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{N_0} - 1\right) e^{-kMt}}$$

2. GRENZGESCHWINDIGKEIT

Ein Lastwagen fährt mit konstanter Antriebskraft und erfährt einen Luftwiderstand, der proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist. Wie entwickelt sich die Geschwindigkeit des Lasters? (Nach [7])

Modellierung

Vereinfachung: Der Reibungswiderstand der Räder wird vernachlässigt

Masse des Lasters: 5000 kg

Momentane Beschleunigung: $a(t)$ Momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit

Resultierende Kraft: $F = m\,a(t) = m\,v'(t)$

Konstante Antriebskraft: $K = 10^4$ N

Luftwiderstand: $-w\,v^2(t)$; $w = 15\text{kg}/\text{m}$

Kraftgleichung: $m\,v'(t) = K - w\,v^2(t)$

Differentialgleichung: $$v'(t) = \frac{K}{m} - \frac{w}{m} v^2(t); \qquad v(0) = 0$$

Exakte Lösung: $$v(t) = \sqrt{\frac{K}{w}}\;\frac{1 - e^{-2\sqrt{wK}\,t/m}}{1 + e^{-2\sqrt{wK}\,t/m}}$$

3. BONBON LUTSCHEN

Wie lange kann man an einem kugelförmigen Bonbon lutschen ? (Nach [7])

Modellierung

Die Volumenabnahme ist in einem kleinen Zeitintervall proportional zur Oberfläche und zur Länge des Zeitintervalls Δt. Das Bonbon bleibt immer eine Kugel.

Anfangsradius des BONBON: $R = 10$ mm

Radius des BONBON zur Zeit t [min]: $r(t)$; $r(0) = R$

Volumenabnahme in Intervall [t, t+Δt]: $V(t+\Delta t) - V(t) \approx -k\, O(t)\, \Delta t$

$k = 1.5$ mm /min

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \qquad V(t+\Delta t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t+\Delta t)$$

$$O(t) = 4\pi r^2(t)$$

Mittlere Änderungsrate:

$$\frac{r^3(t+\Delta t) - r^3(t)}{\Delta t} \approx -3kr^2(t)$$

Substitution: $z(t) = r^3(t)$

$$\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \approx -3k\, z^{2/3}(t)$$

Momentane Änderungsrate: $z'(t) = -3k\, z^{2/3}(t)$

Exakte Lösung: $r(t) = R - kt$

4. GERÜCHTEVERBREITUNG

Wie breitet sich ein Gerücht in einer Gemeinschaft aus ? (Nach [7])

Modellierung (analog Überbevölkerung)

Jede SchülerIn hat in der Zeiteinheit k Kontakte mit MitschülerInnen und erzählt jedesmal das Gerücht weiter. In einem kleinen Zeitintervall ist der Zuwachs von Informierten proportional zu den bereits Informierten, dem Anteil der noch Nichtinformierten und zur Länge des Zeitintervall Δt.

Anzahl SchülerInnen: $N = 1000$

Kontakte pro h: $k = 5\ h^{-1}$

Anzahl Informierte zur Zeit t: $I(t)$; $I(0) = 1$

Anteil Nichtinformierte zur Zeit t: $\frac{N - I(t)}{N}$

Zuwachs an Informierten: $I(t+\Delta t) - I(t) \approx k\, I(t)\, \frac{N - I(t)}{N}\, \Delta t$

Mittlere Änderungsrate: $\frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} \approx kI(t) - \frac{k}{N} I^2(t)$

Momentane Änderungsrate: $I'(t) = kI(t) - \frac{k}{N} I^2(t)$

Exakte Lösung: $I(t) = \dfrac{N}{1 + (N-1)\, e^{-kt}}$

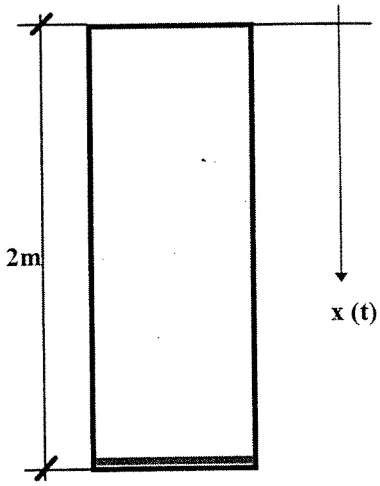
5. SEDIMENTATION

Ein Gefäss wird mit Sandwasser gefüllt. Wann ist es wieder klar ?
(Nach H.E.Donley, The Drag Force on a Sphere. UMAP Module 712, 1992)

Modellierung
Sandhaltiges Wasser wird in einen Behälter der Höhe h=2 m abgefüllt. Es ist abzuschätzen, wie lange es dauert, bis sich der Sand gesetzt hat.
Es werden folgende Annahmen gemacht :

- Die Sandkörner sind kugelförmig mit dem Radius $r = 3 \cdot 10^{-4}$ m (0.3 mm)
- Die Dichte von Sand ist $\rho = 2.5\ 10^3$ kg / m^3
- Die Erdbeschleunigung ist $g = 10$ m / s^2
- Für den Wasserwiderstand einer Kugel in einer Flüssigkeit gilt das Stokessche Gesetz
  $F = 6\pi\,\eta\, r\, v$ mit der Viskosität für Wasser(20°) $\eta = 10^{-3}$ kg / m s

Wir betrachten die resultierende Kraft, die auf ein Sandkorn wirkt.



Die momentane Beschleunigung zur Zeit t ist die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit: $a(t) = v\,'(t)$

Die resultierende Kraft ist : $F(t) = m\,a(t) = m\,v\,'(t)$

Die resultierende Kraft setzt sich zusammen aus:

- dem Auftrieb (V = Volumen) $-V \cdot 10^3 \cdot g$
- der Schwerkraft ($m = V\rho$) $m\,g = V\rho\,g$
- dem Wasserwiderstand $-6\pi\,\eta\,r\,v(t)$

Wir erhalten also die Differentialgleichung :

$$m\,v' = V\rho\,g \;-V10^3\,g \;-6\pi\,\eta\,r\,v$$

Wir dividieren beide Seiten durch $m = V\rho$ und setzen für $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ein:

$$v\,' = g\,\frac{\rho-10^3}{\rho} - \frac{6\pi\,r\,\eta}{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}\,v = g\,\frac{\rho-10^3}{\rho} - \frac{9\,\eta}{2\,r^2\rho}\,v$$

Mit den Annahmen erhalten wir die Differentialgleichung :

$$v\,'(t) = 6 - 20\,v(t) \qquad (1)$$

Für Bestimmung des Ortes eines Sandkorns beachten wir, dass die momentane Geschwindigkeit die momentane Änderungsrate des Ortes ist. Es gilt die Differentialgleichung :

$$x'(t) = v(t) \qquad (2)$$

Eine vernünftige Abschätzung für die Sedimentation bekommt man, wenn man das Verhalten eines Sandkorns betrachtet, das zur Zeit t = 0 an der Wasseroberfläche ist. Für ein solches Sandkorn gilt: $v(0)=0$ und $x(0)=0$

Approximation mit TI-92 nach Euler-Cauchy

Als Zeitintervall wählen wir [0, 10 s], das wir in N gleichlange Intervalle zerlegen . Von $v(t_0) = v(0) = 0$ und $x(t_0) = x(0) = 0$ ausgehend, approximieren wir schrittweise die Funktionswerte von v und x jeweils an der nächstfolgenden Stelle. Die Berechnung der Funktionswerte verfolgen wir in der Tabelle (TABLE). Lösung ist der Wert von t, bei dem x(t) möglichst nahe bei 2 liegt.

Mit der Differentialgleichung (1) erhalten wir :

$v(t_n) \approx v(t_{n-1}) + v'(t_{n-1})\Delta t = v(t_{n-1}) + (6 - 20\,v(t_{n-1}))\,\Delta t$ und $v(t_0) = v(0) = 0$

Mit der Differentialgleichung (2) erhalten wir :

$x(t_n) \approx x(t_{n-1}) + x'(t_{n-1})\Delta t = x(t_{n-1}) + v(t_{n-1})\Delta t$ und $x(t_0) = x(0) = 0$

$N = 1000 \Rightarrow \Delta t = 1/100; \; t_n = \Delta t \; n = n/100 \quad n = 0,1,\ldots 100$

Einstellung : [MODE] Graph........FUNCTION-> 4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

◆ [Y=] u1 (n) = n / 100 (Zeit t)
u2(n) = u2(n-1) + (6 - 20*u2(n-1))/100 (Geschwindigkeit v (t))
ui2 = 0 (Startwert u2(0) = v(0)=0)
✓ u3(n) = u3(n-1) + u2(n-1)/100 (Weg x (t))
ui3 = 0 (Startwert u3(0)=x(0)=0)

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1
Y Axis: u3

◆ [WINDOW]
nmin = 0 nmax=1000 xmin=0 xmax=10 xscl=1 ymin=0 ymax=3 yscl=1

◆ [GRAPH]

◆ [TABLE] [F 2] tblStart : 80 ⇒

n	u1 (=t)	u2 (= v)	u3 (=x)
671	6.71	.3	1.998
672	6.72	.3	2.001

Resultat: Es dauert ca. 6.7 s (genauer Wert 6.716 s) bis ein Sandkorn von der Wasseroberfläche auf den Boden des Behälters gesunken ist.

Exakte Lösungen: $v(t) = \frac{3}{10}(1 - e^{-20t})$ $\quad x(t) = \frac{3}{200}e^{-20t} + \frac{3}{10}t - \frac{3}{200}$

Modellkritik:
- Die Kugelform von Sandkörnern ?
- Wasserwirbel, die kaum zu vermeiden sind, werden nicht berücksichtigt.
- Das "letzte" Sandkorn muss nicht mehr die ganze Höhe zurücklegen.

6. ATOMMÜLL - CONTAINER

Greenpeace protestierte gegen die Versenkung der Atommüll-Container im Meer und behauptete, dass die max. zulässige Aufprallgeschwindigkeit von 12 m s^{-1} in 100 m Tiefe überschritten werde. (Nach [2] und [8])

Modellierung

Grundlagen

Container : $m = 240$ kg $V = 0.21\ m^3$ Wasserwiderstand: $1.17\ v(t)$

Erdbeschleunigung: $g = 9.81\ m\ s^{-2}$ Wasserdichte (Salzwasser): $\rho = 1025$ kg m^{-3}

Für die Bestimmung des Wasserwiderstandes wurden Schleppversuche mit Schiffen durchgeführt.

Wir betrachten die resultierende Kraft, die auf den Container wirkt.

Die momentane Beschleunigung zur Zeit t ist die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit: $a(t) = v'(t)$

Die resultierende Kraft ist : $F(t) = m\,a(t) = m\,v'(t) = 240\,v'(t)$

Die resultierende Kraft setzt sich zusammen aus:

- dem Auftrieb (V = Volumen) $-V\rho g = -0.21 \cdot 1025 \cdot 9.81 = -2111.60$
- der Schwerkraft $m g = 240 \cdot 9.81 = 2354.4$
- dem Wasserwiderstand $-1.17\,v(t)$

Wir erhalten also die Differentialgleichung : $m v' = m g - V\rho g - 1.17 v$

Wir dividieren beide Seiten durch m: $v' = g\left(1 - \frac{V\rho}{m}\right) - \frac{1.17}{m} v$

Mit den Annahmen erhalten wir die Differentialgleichung :

$$v'(t) = 1.0116 - 0.0049\,v(t) \qquad (3)$$

Für Bestimmung des Ortes des Containers beachten wir, dass die momentane Geschwindigkeit die momentane Änderungsrate des Ortes ist. Es gilt die Differentialgleichung :

$$x'(t) = v(t) \qquad (4)$$

Es gilt zudem : $v(0)=0$ und $x(0) = 0$

Exakte Lösungen:

$v(t) = 207.519\,(1 - e^{-0.004875\,t})$

$x(t) = 42568.049\,(e^{-0.004875\,t} - 1) + 207.519\,t = 100 \Rightarrow t = 14.222 \Rightarrow v(14.222) = 13.901$

Approximation mit TI-92 nach Euler-Cauchy

Als Zeitintervall wählen wir [0, 15], das wir in N gleichlange Intervalle zerlegen. Von $v(t_0) = v(0) = 0$ und $x(t_0) = x(0) = 0$ ausgehend, approximieren wir schrittweise die Funktionswerte von v und x jeweils an der nächstfolgenden Stelle. Die Berechnung der Funktionswerte verfolgen wir in der Tabelle (TABLE). Lösung ist der Wert von t, bei dem x(t) möglichst nahe bei 100 liegt.

Mit der Differentialgleichung (3) erhalten wir :

$$v(t_n) \approx v(t_{n-1}) + v'(t_{n-1})\Delta t = v(t_{n-1}) + (1.0116563 - 0.004875\, v(t_{n-1}))\Delta t \quad \text{und} \quad v(t_0) = v(0) = 0$$

Mit der Differentialgleichung (4) erhalten wir :

$$x(t_n) \approx x(t_{n-1}) + x'(t_{n-1})\Delta t = x(t_{n-1}) + v(t_{n-1})\Delta t \qquad \text{und} \quad x(t_0) = x(0) = 0$$

$N = 1000 \Rightarrow \quad \Delta t = 0.015; \quad t_n = \Delta t \cdot n = 0.015 \cdot n \quad n = 0,1, \dots 100$

Einstellung : [MODE] Graph........FUNCTION-> 4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

◆ [Y=] u1 (n) = 15*n / 1000 (Zeit t)
u2(n) = u2(n-1) + (1. 0116563 - 0. 004875 *u2(n-1))*0.015 (Geschwindigkeit v (t))
ui2 = 0 (Startwert u2(0) = v(0)=0)
✓ u3(n) = u3(n-1) + u2(n-1)*0.015 (Weg x (t))
ui3 = 0 (Startwert u3(0)=x(0)=0)

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1
Y Axis: u3

◆ [WINDOW]
nmin = 0 nmax=1000 xmin=0 xmax=15 xscl=1 ymin=0 ymax=110 yscl=10

◆ [GRAPH]

◆ [TABLE] [F 2] tblStart : 945 ⇒

n	u1 (=t)	u2 (= v)	u3 (=x)
948	14.22	13. 899	99.859
949	14. 235	13. 913	100.07

Resultat: Nach nc = 948 Zeiteinheiten, d. h. nach xc= 14.2 s, prallt der Container mit einer Geschwindigkeit von 13.9 m s^{-1} in 100 m Tiefe auf den Meeresboden. Diese Geschwindigkeit übersteigt also die zulässige Aufprall-geschwindigkeit von 12 m s^{-1} .

7. SCHLEPPKURVE

Ein Tanker und das Schleppschiff liegen im Hafen und sind im Abstand a mit einem straff gespannten Tau miteinander verbunden. Der Schlepper zieht den Tanker senkrecht zum Quai so aus dem Hafen, dass das Tau stets straff gespannt bleibt. (Nach [7])

Modellierung

Das Tau ist immer tangential zur Kurve:

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad \text{mit } y(a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

8. EIFFELTURM

Der Eiffelturm trägt zuoberst eine Aussichtsplattform und eine Spitze. Warum hat er dann die Form,die er hat ?

Modellierung

Jeder Querschnitt A (x) hat die gleiche Belastung pro Quadratmeter.

σ : Dichte des Säulenmaterials (kg m^{-3})

A_0 : oberste Querschnittfläche

G_0 : Masse der Turmspitze

$$(A(x+\Delta x) - A(x))\frac{G_0}{A_0} \approx \sigma A(x)\Delta x \quad \Rightarrow A'(x) = \sigma A(x)\frac{A_0}{G_0} \quad \Rightarrow \quad A(x) = A_0\, e^{A_0 \sigma x / G_0}$$

9. EISVERSORGUNG ALEXANDERS DES GROSSEN * (356-323 v.Chr.)

Alexander der Grosse wollte auch bei seinem Feldzug in den asiatischen Wüsten nicht auf seinen gekühlten Wein verzichten. Er liess sich aus den heimatlichen Bergen Makedoniens kubische Eisblöcke heranschaffen. Konnte das funktionieren ? (Nach [7])

Modellierung

- Isolation mit Heu der Dicke D (50) cm
- Ursprüngliche Kantenlänge der Eisblöcke: 50 cm
- ursprüngliche Eisoberfläche F (50 · 50 · 6) cm^2

$\vartheta_A(t)$: Aussentemperatur

$\vartheta_i(t)$: Temperatur im Innern der Packung

Fouriersches Wärmeleitungsgesetz

In einem sehr kleinen Zeitintervall Δt gilt für die zugeführte Wärmemenge ΔQ :

$$\Delta Q \approx \lambda \frac{F}{D} [\vartheta_A(t) - \vartheta_i(t)]\Delta t$$

mit λ : Wärmeleitfähigkeit von Heu (3.02 Joule $grad^{-1}$ cm^{-1} h^{-1})

Solange das Eis nicht vollständig geschmolzen ist , ist $\vartheta_i(t) = 0$.

Es ist also: $$\frac{dQ(t)}{dt} = \lambda \frac{F}{D}\vartheta_A(t)$$

ANNAHMEN: Temperaturverlauf während eines Tages: $$\vartheta_A(t) = \begin{cases} \frac{40}{8}t & \text{für } 0 \le t \le 8 \\ 60 - \frac{40}{16}t & \text{für } 8 \le t \le 24 \end{cases}$$

Alternative: Temperaturverlauf während eines Tages: $$\vartheta_A(t) = \begin{cases} 3 \cdot t & \text{für } 0 \le t \le 15 \\ 120 - 5t & \text{für } 15 \le t \le 24 \end{cases}$$

Damit ist die tägliche Wärmezufuhr 434419 Joule. Um ein Gramm Eis zu schmelzen sind 333 Joule erforderlich. Das ergibt pro Tag 1.3 kg Eis , das schmilzt. In ca. 7 Wochen ist der ursprüngliche Würfel erst auf die Hälfte zusammengeschmolzen.

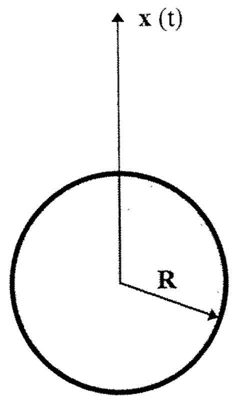
10. SCHUSS IN DEN WELTRAUM : FLUCHTGESCHWINDIGKEIT

Ein Projektil wird auf der Erdoberfläche senkrecht abgeschossen. Wann fällt es nicht mehr auf die Erde zurück ? (Ausführliche Darstellung in [8])

Modellierung

Der Luftwiderstand und andere Störungen werden vernachlässigt.

$x(t)$: Abstand des Projektils vom Erdmittelpunkt zur Zeit t



Mögliche Tips:
- Gleichung mit $2x'$ multiplizieren
- Ansatz: Potenzfunktion
- Energiesatz

DIFFERENTIALGLEICHUNG:

Newtons Grundgesetz
Resultierende Kraft F : $F(x(t), v(t), t) = m x''(t) = m v'(t)$

Gravitationsgesetz
Erdanziehungskraft F: $- \gamma \dfrac{mM}{x^2} = - \dfrac{mg R^2}{x^2}$

γ : universelle Gravitationskonstante mit $\gamma = \dfrac{g R^2}{M}$

R: Erdradius M : Erdmasse

Es gilt also : $m x''(t) = - \dfrac{mg R^2}{x^2} \Rightarrow x'' + \dfrac{g R^2}{x^2} = 0$

LÖSUNG:

a) Differentialgleichung mit $2x'$ multiplizieren :

$$2x'x'' = -2x' \frac{gR^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad [(x')^2]' = [2gR^2 \frac{1}{x}]' \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gR^2 \frac{1}{x} + C$$

Mit $v(0) = v_0$ und $x(0) = R$ folgt: $v_0 = 2gR^2 \frac{1}{R} + C \quad \Rightarrow \quad C = v_0^2 - 2gR$

$$v^2 = 2gR^2 \frac{1}{x} + v_0^2 - 2gR$$

Die Geschwindigkeit ist immer positiv , wenn $v_0^2 - 2gR \geq 0$ ist. Die Fluchtgeschwindigkeit v_0 ist daher :
$v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11.2 \text{ km s}^{-1}$.

b) Ansatz : Potenzfunktion $x(t) = A(t+c)^b$ mit $x(0) = R$ in die Diffferentialgleichung einsetzen.
Grund : Wurzelfunktionen ergeben negative Exponenten $(t^{1/2})'' \approx -t^{-3/2}$, $(t^{1/3})'' \approx -t^{-5/3}$
Versuch: $(t^b)'' = -(t^{-2b}) \Rightarrow b = 2/3$

$$x(t) = \sqrt[3]{4.5gR^2\left(t + \sqrt{\frac{R}{4.5g}}\right)^2}$$

Es gilt : $x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$ dh. das Projektil fällt nicht zurück !

$$x'(0) = v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11.2 \text{ km s}^{-1}$$

c) Energiesatz: $\dfrac{1}{2} m v^2 - \dfrac{1}{2} m v_0 = \dfrac{m g R^2}{x} - m g R \quad \Rightarrow \quad$ a)

Dass $v_0 \approx 11.2 \text{ km s}^{-1}$ als Fluchtgeschwindigkeit ausreicht, ist damit nachgewiesen. Warum aber bei jeder kleineren Geschwindigkeit das Projektil auf die Erde zurückfällt, ist viel schwieriger zu zeigen.

11. GALILEO GALILEI UND DER FALLSCHIRMSPRINGER

Wie fällt ein Körper aus einer Höhe von 1000 m zur Erde?

Modellierung

a) OHNE LUFTWIDERSTAND

Die Schwerkraft ist in der Nähe der Erdoberfläche konstant.

g: Erdbeschleunigung (9.81 m s^{-2})

$x(t)$: Höhe zur Zeit t $v(t)$: Geschwindigkeit zur Zeit t

$x(0) = h$ $v(0) = 0$

Energiesatz:

Die Änderung der kinetischen Energie ist gleich der Änderung der potentiellen Energie

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (x'(t))^2 = mg\,h - mg\,x(t)$$

$$x'(t) = \sqrt{2g\,h - 2g\,x(t)} \quad \Rightarrow \quad x(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Newton'sches Kraftgesetz:

$m\,\Delta v(t) \approx m\,g\,\Delta t$

$$v'(t) = g \quad \Rightarrow \quad v(t) = -x'(t) = g t \quad \Rightarrow \quad x(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

b) MIT LUFTWIDERSTAND (Fallschirm)

Der Luftwiderstand ist etwa proportional zur Geschwindigkeit, solange diese nicht zu gross ist.

ρ : Luftwiderstandskoeffizient

$$m v'(t) = mg - \rho v(t) \quad \Rightarrow \quad v'(t) = g - \frac{\rho}{m} v(t)$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = -x'(t) = \frac{mg}{\rho} - \frac{mg}{\rho} e^{-\frac{\rho}{m} t}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{m^2 g}{\rho^2}\left(1 - e^{-\frac{\rho}{m} t}\right) - \frac{mg}{\rho} t + h$$

Approximation:

$$v(t_{n+1}) \approx v(t_n) + v'(t_n)\,\Delta t = v(t_n) + \left(g - \frac{\rho}{m} v(t_n)\right)\Delta t \qquad v(t_0) = 0$$

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) - v(t_n)\,\Delta t \qquad x(t_0) = h$$

$h = 1000$ $g = 9.81$ $m = 50$ $\rho = 100$ Intervall [0, 200] $N = 1000$ $\Delta t = 0.2$

Einstellung : [MODE] Graph........FUNCTION-> 4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

◆ [Y=] u1(n) = 200 *n / 1000
u2(n)=u2(n-1)+ (9.81 - 2*u2(n-1))* 0.2
ui2= 0
✓ u3(n)=u3(n-1) - u2(n-1) *0.2
ui3=1000

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1
Y Axis: u3

◆ [WINDOW] nmin = 0 nmax=1000 xmin=0 xmax=200
xscl=10 ymin=0 ymax=1000 yscl=100

◆ [GRAPH]

12. EPIDEMIE
analog zur Gerüchteverbreitung

Unter den Schülern und Schülerinnen eines Schulhauses breitet sich eine sehr leichte Gripppe aus.

Anhang

I. Probleme mit dem TI-92 **Stand 04. Mai 1997**

Wozu diese Liste ?

Bei unseren Untersuchungen sind wir auf etliche Probleme gestossen. Wir veröffentlichen diese Liste, weil sie für LehrerInnen wohl von einigem Interesse ist. Wer demnächst ein bestimmtes Kapitel behandelt, kann nachschlagen, welche Schwierigkeiten und Überraschungen dabei auftreten können. Manche Probleme treten auch bei grösseren CAS auf.
Wir haben diese Liste an Texas Instruments weitergeleitet und hoffen auf eine baldige Behebung der dargelegten Probleme.
Die beschriebenen Probleme sind bei den uns zur Verfügung stehenden Geräten - manchmal auch nur bei einigen davon - aufgetreten. Da das CAS des TI-92 offenbar regelmässig überarbeitet wird, ist es durchaus möglich, dass das eine oder andere Problem bei den neuesten Modellen überhaupt nicht mehr oder nicht genau in der beschriebenen Form auftritt.
Die Versionsnummer kann vom Home-Screen aus mit der Tastenkombination [F5] ◆ [( ] abgerufen werden. Die anschliessende Rückkehr erfolgt mit ◆ [HOME] .

Inhalt:

Probleme mit dem TI-92

A. Bruchterme, Bruchgleichungen

Nr	Problem	*Eingabe*, Ausgabe des TI-92	Richtige Lösung, Kommentar
1	$\frac{12ax-5}{a} = 6x$ a=?	*solve((12*a*x–5)/a = 6*x, a)*	$a = \frac{5}{6x}$ Nur einige Geräte finden die Lösung. Das Problem besteht darin, dass unterschiedliche Rechnermodelle im Umlauf sind. Im Klassenverband könnte dies zu Problemen führen.
2	$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$ x=?	*solve(1/(x–2)+1/(x+2)=4/(x^2–4),x)* $x = \infty$ or $x = -\infty$	Keine Lösung ($\pm\infty$ werden bei solchen Aufgaben üblicherweise nicht als Lösung betrachtet.)
3	Ist x=2 eine Lösung von Aufgabe 2?	*1/(x–2)+1/(x+2)=4/(x^2–4) | x=2* true	Nein: zwei Brüche sind nicht definiert, weil ihr Nenner 0 wird.
4	$\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+8}{x^2-4}$ x=?	*solve(3/(x–2)–1/(x+2)=(2*x+8)/(x^2–4), x)* true	$IL = ID = IR \setminus \{-2, 2\}$
5	Sind $x = \pm 2$ Lösungen von Nr. 4?	*3/(x–2)–1/(x+2)=(2*x+8)/(x^2–4) | x=2* true *3/(x–2)–1/(x+2)=(2*x+8)/(x^2–4) | x=–2* true	Nein Beide Zahlen sind keine Lösungen, weil beim Einsetzen einige Nenner 0 werden.
6	$\left(\frac{a+2b}{a^2-b}x - \frac{2a-b}{a-b^2}\right)^2$ =?	*expand(((a+2*b)/(a^2-b)*x–(2*a–b)/(a–b^2))^2)* Nach etwas über 30 Minuten: Warning: Memory full, simplification might be incomplete Das ausgegebene Resultat ist erst teilweise ausmultipliziert.	Das gleichzeitige Ausmultiplizieren aller 3 Varablen ist zuviel für den TI-92. Kniff: Schrittweises Vorgehen: *expand(((a+2*b)/(a^2-b)*x–(2*a–b)/(a–b^2))^2, x)* *expand(ans(1))*
7	$v = \frac{a+b}{1+\frac{a\cdot b}{c^2}}$ c=?	*solve(v=(a+b)/(1+a*b/c^2), c)* false	$c = \pm\sqrt{\frac{abv}{a+b-v}}$ Beide Lösungen werden unterschlagen.

B. Wurzeln

Nr	Problem	*Eingabe,* Ausgabe des TI-92	Richtige Lösung, Kommentar
1	$a-\sqrt{x-a}=\sqrt{x}$ x=?	*solve(a–√(x–a) = √(x), x)* $\sqrt{x-a}+\sqrt{x}=a$	wenn a=0: x=0 wenn a≠0: $x=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$ Der TI-92 findet die Lösung nicht. Kniff: Gleichung zuerst quadrieren; aber die ausgegebene Bedingung ist immer noch falsch.
2	$6\left(\sqrt{x+4}-2\right)=x\left(5-\sqrt{x+4}\right)$ x=?	*solve(6*(√(x+4)–2) = x*(5–√(x+4)), x)* x=0.	2 Lösungen: 0, 12 Eine Lösung fehlt. Kniff: Gleichung zuerst quadrieren.
3	$\sqrt{1+x\sqrt{1+8x}}=x+1$ x=?	*solve(√(1+x*√(1+8*x))=x+1,x)* x = 0. or x = –.125	3 Lösungen: 0, 1, 3 Eine „Lösung" ist falsch, zwei richtige Lösungen fehlen. Kniff: Gleichung zuerst quadrieren.

C. Gleichungen 2./3./4. Grades und verwandte Aufgaben

Nr	Problem	*Eingabe,* Ausgabe des TI-92	Richtige Lösung, Kommentar
1	$x^4-3ax^2-4a^2=0$ x=?	*solve(x^4–3*a*x^2–4*a^2=0,x)* $x=2\sqrt{a}$ or $x=-2\sqrt{a}$	4 Lösungen: $\pm\sqrt{-a}, \pm 2\sqrt{a}$ Zwei Lösungen fehlen. Das ist überraschend, weil $x^2+a=0$ richtig gelöst wird. Kniff: zuerst *factor* anwenden.
2	$a\cdot x^4 - b\cdot x^2 - c = 0$ x=?	*solve(a*x^4 – b*x^2 – c=0,x)* $x=\frac{\sqrt{2\cdot(\sqrt{4\cdot a\cdot c+b^2}+b)}}{2\cdot\sqrt{a}}$ or $x=\frac{-\sqrt{2\cdot(\sqrt{4\cdot a\cdot c+b^2}+b)}}{2\cdot\sqrt{a}}$	$x=\pm\frac{\sqrt{2\cdot(\sqrt{4\cdot a\cdot c+b^2}+b)}}{2\cdot\sqrt{a}}$ $x=\pm\frac{\sqrt{2\cdot(b-\sqrt{4\cdot a\cdot c+b^2})}}{2\cdot\sqrt{a}}$ Die fehlenden Lösungen werden als komplexe Lösungen betrachtet.
3	Welches sind die Nullstellen von $x+\frac{1}{x}-p$, wenn $\lvert p\rvert<2$	*zeros(x+1/x–p, x)* $\mid$ *p>–2 and p<2* $\left\{\frac{\sqrt{p^2-4}+p}{2} \quad \frac{-\left(\sqrt{p^2-4}+p\right)}{2}\right\}$	Keine (reelle) Lösung Die Einschränkung $\mid$ wird ignoriert.

D. Trigonometrie

Nr	Problem	*Eingabe,* Ausgabe des TI-92	Richtige Lösung, Kommentar
1	sin(x) = cos(x) x=? $x\in[0, 2\pi]$	*solve(sin(x)=cos(x),x)* $\mid$ *x>=0 and x<=2*π* $x=\frac{(4*@n1-3)\cdot\pi}{4}$	Zwei Lösungen: ¼·π, 5/4·π Der Operator $\mid$ wird ignoriert.

E. Potenzen, Exponentialgleichungen, Logarithmen

<table>
<tr><th>Nr</th><th>Problem</th><th>Eingabe, Ausgabe des TI-92</th><th>Richtige Lösung, Kommentar</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$1=(-1)^k$, k=?</td><td>solve(1=(–1)^k, k) false (d.h. keine Lösung)
solve(1=(–1)^@n1, @n1) @n1=2·@n9</td><td>k irgendeine gerade Zahl
Nur der zweite Weg klappt.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$10^{5x-2.5}=10^{4x-1}$ x=?</td><td>solve(10^(5*x–5/2)= 10^(4*x–1), x) x=–∞ or x=3/2</td><td>x=3/2 (–∞ wird bei solchen Problemen üblicherweise nicht als Lösung betrachtet.)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Zeichne den Graphen von $y(x)= x^{1/3}$</td><td>graph x^(1/3) |D = |R</td><td>Die Definition der Funktion für negative x ist problematisch (Potenzgesetze).
Kniff: graph x^(1/3) | x>= 0
(Dieses Problem tritt nur bei folgender Einstellung auf: MODE / Complex Format: REAL)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\log_{10}\sqrt{x+1} + 3\cdot\log_{10}\sqrt{x-1} = 2+\log_{10}\sqrt{x^2-1}$ x=?</td><td>solve(log(√(x+1))+3*log(√(x-1)) = 2+log(√(x^2-1)), x) x=101. or x=–99.</td><td>101
–99 ist falsch.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Prüfe, ob x=1 and x=–1 Lösungen von Nr. 4 sind.</td><td>log(√(x+1))+3*log(√(x-1))=2+log(√(x^2-1))|x=1 true
log(√(x+1))+3*log(√(x-1)) =2+log(√(x^2-1))|x= –1 false</td><td>x=1 und x=–1 sind keine Lösungen, weil Logarithmen von nicht-positiven Zahlen auftreten.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$200\,(1 - e^{-\frac{t}{150}}) = 50$
$200\,(1 - e^{-\frac{t}{150}}) - 50 = 0$
$200\,(1 - e^{\frac{t}{150}}) = 50$
$200\,(1 - e^{\frac{t}{v}}) = 50$</td><td>solve(200*(1-e^(-t/150))=50 false
Warnig:
Memory full, simplification might be incomplete
solve(200*(1-e^(-t/150))=50 t =-150 ln(3)+300 ln(2)
solve(200*(1-e^(t/150))=50 t =150 ln(3) -300 ln(2)
solve(200*(1-e^(t/150))=50 t = -v (ln (3) - 2 ln (2))</td><td>t = -150 ln 3 + 300 ln 2
t = -150 ln 3 + 300 ln 2 Berechnung gelingt.
t = 150 ln 3 - 300 ln 2 Berechnung gelingt.
t = - v (ln 3 - 2 ln 2) Berechnung gelingt.</td></tr>
</table>

F. Komplexe Zahlen

<table>
<tr><th>Nr</th><th>Problem</th><th>Eingabe, Ausgabe des TI-92</th><th>Richtige Lösung, Kommentar</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$z+2i\bar{z}=8+7i$ z=?</td><td>csolve(z+2*i *conj(z) = 8+7*i, z) z= 22 / 5 – 9 / 5·i</td><td>2+3i
Der TI-92 liefert ein falsches Resultat, und zwar auch dann, wenn vorher die Variable z mit a+b*i → z als komplexe Zahl deklariert worden ist.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$z^3 + 3z^2 + i = 0$
z=? (komplexe Lösungen)</td><td>csolve(z^3+3*z^2+ i = 0, z) false (d.h. keine Lösung)
czeros(z^3+3*z^2+i, z) { } (d.h. keine Lösung)</td><td>3 Lösungen: –0.394 + 0.472·i
–3.008 – 0.110·i
0.402 – 0.362·i
3 Lösungen werden unterschlagen.
Kniff: Zuerst cfactor(......, z) anwenden.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$z^3 - 3z + i + 2 = 0$
z=? (komplexe Lösungen)</td><td>csolve(z^3 – 3*z+ i + 2 = 0, z) false
czeros(z^3–3*z+i+2, z) { }
In beiden Fällen: Rechenzeit ca 3¾ Std. sowie Warning: Memory full, simplification might be incomplete</td><td>3 Lösungen werden unterschlagen:
0.606 + 0.472·i
–2.008 – 0.110·i
1.402 – 0.362·i
Kniff: Zuerst cfactor(......, z) anwenden.</td></tr>
</table>

G. Folgen und Reihen

<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Problem</th><th>Eingabe,</th><th>Ausgabe des TI-92</th><th>Richtige Lösung, Kommentar</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$a_n:=n^2-n+3$.
$a_{n+1}=?$
$a_{m+1}=?$</td><td>n^2–n+3 → a(n)
a(n+1)

a(m+1)</td><td>
Error: Circular definition
(nur auf einigen Taschenrechnern!)
m^2+m+3</td><td>
n^2+n+3

m^2+m+3
Das Problem besteht darin, dass unterschiedliche Rechnermodelle im Umlauf sind. Im Klassenverband könnte dies zu Problemen führen.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Vereinfache:
$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$,
$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\binom{n}{k}$,
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$</td><td>Σ(1/k!, k, 0 ∞)
Σ(ncr(n, k), k, 0, n)
Σ((–1)^(k+1)/k, k, 1, ∞)
Σ((–1)^k/(2*k+1), k, 0, ∞)
Σ((–1)^(k+1)/k^2, k, 0, ∞)
Σ((–1)^k*ncr(n, k), k, 0, n)
Σ(ncr(n, k)^2, k, 0, n)</td><td></td><td>e, 2^n, ln 2,

$\pi/4$, $\pi^2/12$, 0,

$\binom{2n}{n}$
Der TI-92 kennt keine dieser z.T. berühmten Reihen.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$a_n:=\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}$ $a_{k+1}-a_k=?$</td><td>Σ(1/i, i, n+1, 2*n) → a(n)
a(k+1)–a(k)</td><td>
$\sum_{i=k+2}^{2(k+1)}\left(\frac{1}{i}\right)-\sum_{i=k+1}^{2k}\left(\frac{1}{i}\right)$</td><td>$\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{k-1}$
Der Term wird nicht ausgewertet.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Berechne $\sum_{n=0}^{\infty}v^n$, wenn
a) v = 3/4 b) v = –3/4
c) |v| <1 d) 0 < v < 1</td><td>Σ(v^n, n, 0, ∞)|v=3/4
Σ(v^n, n, 0, ∞)|v=–3/4
Σ(v^n, n, 0, ∞)|v>–1 and v<1
Σ(v^n, n, 0, ∞)|v>0 and v<1</td><td>4
undef
undef
$\frac{-1}{v-1}$</td><td>a) 4 b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{1}{1-v}$ d) $\frac{1}{1-v}$
Bei b) und c) liefert der TI-92 falsche Resultate.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>a) $\sum_{k=0}^{100}c^k$ für $c\neq1$
b) $\sum_{k=0}^{n}c^k$
c) Werte das Resultat von b aus für n=100</td><td>Σ(c^k, k, 0, 100) | c/=1
Σ(c^k, k, 0, n)
ans(1) | n=100</td><td>$c^{100}+c^{99}+c^{98}+c^{97}+c^{96}+c^{95}+c^{94}+\ldots$
$\frac{c\cdot c^n}{c-1}-\frac{1}{c-1}$
$c^{100}+c^{99}+c^{98}+c^{97}+c^{96}+c^{95}+c^{94}+\ldots$</td><td>$\frac{c^{101}-1}{c-1}$
$\frac{c^{n+1}-1}{c-1}$
$\frac{c^{101}-1}{c-1}$
Wann wendet der Rechner die entsprechende Regel an?</td></tr>
</table>

H. Grenzwerte

Nr	Problem	*Eingabe,*	Ausgabe des TI-92	Richtige Lösung, Kommentar
1	a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{x^m}$, falls n<m	*limit(x^n / x^m, x, ∞) | n<m*	undef	0 Einsatz von @n1 anstelle von n bzw. @n2 anstelle von m bringt nichts (undef).
	b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{x^m}$, falls n>m	*limit(x^n / x^m, x, ∞) | n>m*	undef	∞
	c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}$, falls $x=-1$	*limit(1/(x^(2*n)+1),n,∞)|x=-1*	undef	½
		limit(1/(x^(2@n1)+1),n,∞)|x=-1*	½	
	d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}$, falls $x<-1$	*limit(1/(x^(2*n)+1),n,∞)|x<-1*	Non real result	0 Einsatz von @n1 anstellevon n bringt nichts.
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{99}}{n}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{100}}{n}\right)^n$	*limit((1+(t/99)/n)^n, n, ∞)*	$e^{\frac{t}{99}}$ *oder* undef *(je nach Gerät)*	$e^{\frac{t}{99}}$ $e^{\frac{t}{100}}$
		limit((1+(t/100)/n)^n, n, ∞)	∞	
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{101}}{n}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{999}}{n}\right)^n$	*limit((1+(t/101)/n)^n, n, ∞)*	$e^{\frac{t}{101}}$	$e^{\frac{t}{101}}$ $e^{\frac{t}{999}}$
		limit((1+(t/999)/n)^n, n, ∞)	$e^{\frac{t}{999}}$	
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{1000}}{n}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{V}}{n}\right)^n$	*limit((1+(t/1000)/n)^n, n, ∞)*	∞	$e^{\frac{t}{1000}}$ $e^{\frac{t}{V}}$
		limit((1+(t/V)/n)^n, n, ∞)	$e^{\frac{t}{V}}$	
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{20}}{n}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{.05\cdot t}{n}\right)^n$	*limit((1+(t/20)/n)^n, n, ∞)*	$e^{\frac{t}{20}}$	$e^{\frac{t}{20}}$ $e^{0.05\cdot t} \approx 1.05127^t$
		*limit((1+(0.05*t)/n)^n, n, ∞)*	0	
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{.04\cdot t}{n}\right)^n$	*limit((1+(0.04*t)/n)^n , n , ∞)*	$(1.04081)^t$	$e^{0.04\cdot t} \approx 1.04081^t$ Wann erscheint ∞, wann undef, wann 0, wann die richtige Lösung?

I. Differential- /Integralrechnung

Nr	Problem	*Eingabe*, Ausgabe des TI-92	Richtige Lösung, Kommentar
1	Leite ab: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)$	*d(Σ(ln(x+k), k, 0, n), x)* $\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)\right)$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}$ Der TI-92 scheint die Regel $\left(\sum f_k(x)\right)'=\sum f_k'(x)$ nicht zu kennen.
2	Bestimme die Extrema von $f(x)=(r+x)\sqrt{2r(r-x)}+x^2$	*(r+x)*√(2*r*(r–x))+ x^2 →f(x,r)* Done *zeros(d(f(x,r),x), x)* { }	$-r,\ \frac{7+\sqrt{17}}{16}r$ Die Lösungen werden nicht gefunden.
3	Berechne die Bogenlänge des Viertelkreises.	*arclen(√(r^2–x^2), x, 0, r)* $\lvert r\rvert\cdot\int_0^r\sqrt{\frac{1}{r^2-x^2}}\,dx$	$\frac{\pi}{2}\cdot r$
4	$\int\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=?$ $\int\sqrt{\frac{1}{r^2-x^2}}dx=?$	∫ *(1/√(r^2–x^2), x, c)* $\sin^{-1}\left(x\cdot\left\lvert\frac{1}{r}\right\rvert\right)+c$ ∫ *(√(1/(r^2–x^2)), x, c)* $\int\sqrt{\frac{-1}{x^2-r^2}}dx+c$	$\sin^{-1}\left(\left\lvert\frac{x}{r}\right\rvert\right)+c$ Die Lösung wird nur beim ersten Mal gefunden.
5	$\int_0^1(ax^2-x-a)^2dx$ Mitteilung : Peter Geiger, Zürich Andere Integrationsgrenzen: $\int_1^2(ax^2-x-a)^2dx$	∫ *((a*x^2–x–a)^2,x,0,1)* $\frac{8}{15}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$ ∫ *((a*x^2–x–a)^2,x,1,2)* $\frac{38}{15}a^2-\frac{9}{2}a+7/3$	$\frac{8}{15}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$ Das Resultat wird zwar gefunden, aber erst nach rund 3 Stunden Rechenzeit... Und dies, obwohl das *unbestimmte* Integral problemlos gefunden wird. $\frac{38}{15}a^2-\frac{9}{2}a+7/3$ Die Berechnung gelingt sofort.
6	$\int_1^n(-\frac{x^{10}}{120}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}-x^2+1)\,dx$ Andere Integrationsgrenzen: $\int_0^n(-\frac{x^{10}}{120}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}-x^2+1)\,dx$ Integrand etwas modifiziert: $\int_0^n(\frac{x^{10}}{120}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}+x^2+1)\,dx$	∫ *(-x^10/120+x^8/24-x^6/6+x^4/2-x^2+1,x,1,n)* $-\frac{n^{11}}{1320}+\frac{n^9}{216}-\frac{n^7}{42}+\frac{n^5}{10}-\frac{n^3}{3}+n-\frac{31049}{41580}$ ∫ *(-x^10/120+x^8/24-x^6+x^4/2-x^2+1,x,0,n)* **BUSY** ∫ *(x^10/120+x^8/24+x^6/6+x^4/2+x^2+1, x, 0, n)* $\frac{n^{11}}{1320}+\frac{n^9}{216}+\frac{n^7}{42}+\frac{n^5}{10}+\frac{n^3}{3}+n$	$-\frac{n^{11}}{1320}+\frac{n^9}{216}-\frac{n^7}{42}+\frac{n^5}{10}-\frac{n^3}{3}+n-\frac{31049}{41580}$ Die Berechnung gelingt sofort. $-\frac{n^{11}}{1320}+\frac{n^9}{216}-\frac{n^7}{42}+\frac{n^5}{10}-\frac{n^3}{3}+n$ Rechenzeit > 5 Stunden; das Resultat ist aber richtig $\frac{n^{11}}{1320}+\frac{n^9}{216}+\frac{n^7}{42}+\frac{n^5}{10}+\frac{n^3}{3}+n$ Die Berechnung gelingt sofort.

7	$\int \sin(\ln x)dx = ?$	$\int$ *(sin(ln(x)), x)* $\int$ *(sin(ln(x)), x) | x>0*	$\int \sin(\ln(x))dx$ $\int \sin(\ln(x))dx$	$\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$
8	$\int x^n dx = ?$ $\int_a^b x^n dx = ?$ $\int_0^1 x^n dx = ?$	$\int$ *(x^n , x)* $\int$ *(x^n , x , a , b)* $\int$ *(x^n , x, 0, 1)*	$\frac{x \cdot x^n}{n+1}$ $\frac{-a \cdot a^n}{n+1} + \frac{-b \cdot b^n}{n+1}$ undef	$\frac{x \cdot x^n}{n+1}$, falls $n \neq -1$; $\ln\|x\|$ sonst Das Resultat hängt ab von n, a und b Problem: Wenn das dritte Integral *undef* liefert, müsste das zweite erst recht *undef* liefern.

J. Kombinatorik

Nr	Problem	*Eingabe,*	Ausgabe des TI-92	Richtige Lösung, Kommentar
1	Vereinfache: a) $(n+1) \cdot n!$ b) $(n+1) \cdot n! - (n+1)!$ c) $\frac{n}{s} \cdot \binom{n-1}{s-1}$ d) $\frac{n}{s} \cdot \binom{n-1}{s-1} - \binom{n}{s}$	 *(n+1)*n!* *(n+1)*n!–(n+1)!* *n/s*ncr(n–1, s–1)* *n/s*ncr(n–1, s–1) – ncr(n, s)*	 $(n+1) \cdot n!$ 0 $\frac{n!}{(-k+n)!}$ 0	 $(n+1)!$ 0 Die Beziehung $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ wird nur manchmal erkannt / angewandt. $\binom{n}{s}$ 0 Gleiches Problem mit anderer Formel.

II. Wieviel ALGEBRA braucht es noch ?

Wir gehen von folgenden Annahmen aus :

- Das Computer-Algebra-System CAS ist jederzeit verfügbar.
- Im wesentlichen werden die bisherigen Aufgabensammlungen eingesetzt.
- Die aufgeführten Kapitel werden auch tatsächlich behandelt

Was die SchülerInnen nach wie vor wissen müssen...

... weil es zu den mathematischen Grundlagen gehört, das CAS keine Hilfe ist oder weil es für den Einsatz des CAS nötig ist.

Funktionen

Die Schülerinnen und Schüler können / kennen.....

- die elementaren Funktionen.
- die Graphen der *elementaren* Funktionen skizzieren und die charakteristischen Eigenschaften erkennen.
- das asymptotische Verhalten einer Funktion bestimmen.
- die Umkehrfunktion (Umkehrrelation) bestimmen.
- abklären, ob ein Punkt auf einem Graphen liegt.
- *einen Graphen im Koordinatensystem verschieben und spiegeln (Geradenspiegelung , Punktspiegelung), strecken und stauchen.*
- *die Funktionsgleichung $y=f(x)$ bei vorgegebenem Ansatz für $f(x)$ so bestimmen, dass f die verlangten Bedingungen erfüllt.*

Spezielle Funktionen

Polynomfunktionen

- die Methode des Koeffizientenvergleichs bei Polynomen.
- den Scheitelpunkt einer quadratischen Parabel berechnen und abklären, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt (Quadratische Ergänzung).

Trigonometrische Funktionen

- das Grad - und Bogenmass.
- die Winkelmasse manuell umrechnen .
- die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen - Winkel im Einheitskreis.
- *mit den Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen Sätze herleiten oder beweisen.*
- *die Lösungsmenge von goniometrischen Gleichungen bestimmen.*

Gebrochen rationale Funktionen

- *die Lücken und Pole bestimmen und die Asymptoten berechnen.*

Was die SchülerInnen weniger brauchen...

... weil das CAS es besser und schneller erledigen kann.

Skizzieren der Graphen von *beliebigen* Funktionen.

Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms durch Faktorisieren.

Algebra

Die Schülerinnen und Schüler können / kennen .....

- einfache Terme manuell auf eine bestimmte Gestalt bringen - umformen.
- einfache Gleichungen (von allen Gleichungstypen) lösen.
- einfache Systeme bis 3 Unbekannte lösen.
- Lösungsmethoden für lineare Gleichungssysteme (Substitution und Gauss-Algorithmus).
- die Äquivalenzumformungen und nicht äquivalente Umformungen.
- die Äquivalenz von Termen (z.B. $\frac{1}{2} \cdot \ln x = \ln \sqrt{x}$) erkennen.
- die Bedeutung der Approximation von Lösungen.
- die Lösungsmenge bei einfachen Gleichungen und Gleichungssystemen untersuchen.
- die Lösungsmenge einfacher Ungleichungen bestimmen.
- ein einfaches Systems von Ungleichungen lösen.
- Textaufgaben / angewandte Probleme in die mathematische Sprache übersetzen.
- *Fallunterscheidungen bei einfachen Systemen mit Parametern treffen.*

Spezielle Themen der Algebra

Quadratische Gleichungen

- die Lösungsformel.
- die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung untersuchen.
- mit Wurzeltermen und Wurzelgleichungen umgehen.
- einfache quadratische Ungleichungen lösen.
- *einfache quadratische Gleichungssysteme lösen.*

Potenzen und Logarithmen

- die Potenzschreibweise
- die Potenzgesetze auch für negative und rationale Exponenten.
- Wurzeln mit rationalen Exponenten schreiben.
- Potenzen von einer Form in eine andere umwandeln.

$5 \cdot 5^{1/3} \rightarrow 5^{4/3} \qquad \frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow 10^{-1/2} \qquad \frac{1}{a^{11/12}} \rightarrow a^{-11/12} \qquad 4096 \rightarrow 2^{12}$

- einfache Exponentialgleichungen lösen.

Schwierige Terme faktorisieren.
Doppelbruchakrobatik beherrschen.
Schwierige Bruchgleichungen lösen.
Polynomdivisionen durchführen.
Fertigkeit beim Lösen von Gleichungssystemen.

quadratische Ergänzungen durchführen.

Lösungsfertigkeit für quadratische Gleichungen.

Potenzrechnenakrobatik.
Logarithmengesetze.
Fertigkeit bei den Logarithmusgesetzen.

Folgen und Reihen

- die wichtigsten Folgen und Reihen und ihre Eigenschaften.
- die Darstellungsarten von Folgen: explizite und rekursive Form.
- die Gesetzmässigkeiten von Folgen erkennen (vorerst ohne Beweise).
- *die Eigenschaft des Fixpunktes* ($x_{n+1}=x_n$).
- den Begriff des Grenzwertes einer Folge.
- den Grenzwert bei einfachen Folgen bestimmen.

Vollständige Induktion

- die Deduktion und Induktion
- die Grundidee der vollständigen Induktion .
- einfache Induktionsbeweise manuell durchführen.

Viele Induktionsbeweise schafft das CAS problemlos.

Komplexe Zahlen

- die Zahlemengen: natürliche Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen
- die Darstellungen der komplexer Zahlen (Rechtwinklige- und Polarkoordinaten).
- die komplexen Zahlen umformen.
- die komplexen Zahlen in der komplexen Ebene darstellen.
- elementare Rechnungen mit komplexen Zahlen durchführen.

Vektoralgebra - Vektorgeometrie

Die Schülerinnen und Schüler können / kennen .....

- einfache räumliche Probleme in einem Schrägbild darstellen.
- den Begriff des Vektors.
- die Vektoroperationen Addition/Subtraktion, Vervielfachung, Skalarprodukt und können sie bei Problemen anwenden.
- *die Matrix und ihre Operationen (Gleichungssysteme)*
- Die Geradengleichung in IR^2 und IR^3 bestimmen und interpretieren.
- die Berechnung des Schnittwinkel zweier Geraden in IR^2 und IR^3 .
- die Kreisgleichung in IR^2 in allgemeiner Lage aufstellen und interpretieren.

Der überwiegende Teil der traditionellen Aufgaben in der Vektorgeometrie kann mit dem CAS mechanisch erledigt werden.

Differentialrechnung

Die Schülerinnen und Schüler können / kennen .....

- bei konkreten mathematischen und physikalischen und ... Aufgabenstellungen via die mittlere Änderungsrate (Differenzenquotient) auf einem Intervall die lokale Änderungsrate an einer Stelle (Differentialquotient) bestimmen.
- den Ableitungsbegriff und einige Interpretationen.
- die Ableitung einfacher elementare Funktionen herleiten.
- die Ableitungen der elementaren Funktionen.
- die Ableitungsfunktion skizzieren.
- die Eigenschaften von Kurven: Definitionsbereich-Monotonie-Extrema-Krümmung.
- den Begriff des Schnittwinkels zweier Kurven.
- das Rezept zur Lösung von Extremalaufgaben, wie man zur Nebenbedingung kommt (Strahlensätze, Pythagorassatz usw.).
- den physikalischen Zusammenhang zwischen s(t), v(t) und a(t).
- *Pole und Definitionslücken bestimmen.*
- *Interpolationsaufgaben mit den Ableitungen lösen.*
- *implizit differenzieren.*
- *den Konvergenzbereich einer Potenzreihe bestimmen.*

Nur exemplarische einige Ableitungen herleiten.
Nur exemplarische einige Ableitungen mit der Eigenschaft der Linearität bestimmen.
Auf die Produkt- , Quotienten- und Kettenregel könnte man an und für sich verzichten. Man darf aber dann keine grosse manuelle Fertigkeit bei der Bestimmung von Stammfunktionen erwarten.
Kurvendiskussion: Ein einfaches Programm schafft es auch.

Integralrechnung

Die Schülerinnen und Schüler können / kennen .....

- bei konkreten mathematischen und physikalischen und .... Aufgabenstellungen via Obersumme / Untersumme / Riemannsche Summe das bstimmte Integral konstruieren.
- den Integralbegriff und einige Interpretationen.
- einfache elementare Integrale herleiten.
- die Stammfunktionen der elementaren Funktionen.
- den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und können ihn begründen.
- die Fläche zwischen zwei Graphen berechnen.
- das Integral bei Anwendungen einsetzen.
- *die Bedeutung der numerischen Integration (Rechner).*
- *die partielle Integration zum Herleiten von Rekursionsformeln; sonst scheinen Integrationsmethoden völlig überflüssig zu sein.*

Integrationsmethoden.

III. Schulversuch: Analysis mit dem CAS des TI-92

Rahmenbedingungen:

- **Versuchsklasse:**
  Realgymnasium der Kantonsschule Alpenquai Luzern
  6. Klasse (12. Schuljahr): 10 Schülerinnen und 10 Schüler.
  Die Leistungsfähigkeit der Klasse ist aus verschiedenen Gründen in der Mathematik und auch gesamthaft unterdurchschnittlich.

- **Zeitrahmen:**
  Zeitpunkt: 7. Januar 97 - 16. Januar 97
  - 2 Lektionen: Vorbereitung - Einführung des TI-92
  - 13 Lektionen: Einführung in die Analysis
  - 2 Lektionen: Prüfung in Zweierteams
  - 2 Lektionen: Prüfungsbesprechung und Evaluation der Schüler

- **Stoffrahmen:**
  - 1. Kapitel : Einführung - Modelle
  - 2. Kapitel : Einführung in die Grundlagen der Analysis

Evaluation der Lehrer:

- **Probleme der SchülerInnen:**
  - Im zur Verfügung stehenden Zeitraum konnten sich die SchülerInnen kaum gleichzeitig Fertigkeiten im Umgang mit dem Rechner und dem mathematischen Thema erarbeiten.
  - Die SchülerInnen brauchten länger als vorgesehen, um mit dem Rechner vertraut zu werden. Diese Schwierigkeit wird bei einem permanenten Einsatz des TI-92 kleiner werden.
  - Die Umsetzung der mathematischen Algorithmen auf den Rechner darf man nicht überstürzen.
  - Den SchülerInnen muss trotz oder auch wegen des CAS ausreichend Übungsmaterial und Übungszeit zur Verfügung stehen.
  - Einen vernünftigen Umgang mit den Problemen, die der Rechner stellt, müssen die SchülerInnen und die LehrerInnen herausfinden.
    - Wie geht man mit Fehlermeldungen um ?
    - Wie findet man Syntaxfehler ?
    - Wie kann man die vom Benutzer definierten Variablen optimal verwalten ?
    - Wie geht man mit einem Rechnerabsturz um ?

    Die intensive Betreuung bei CAS-Problemen lässt Halbklassen *sehr* wünschenswert erscheinen.

- **Didaktische Probleme:**
  - Nach welcher Wartezeit darf man keine Ergebnisse mehr erwarten ?
  - Wie erkennt man, dass Lösungen fehlen, und wie findet man diese Lösungen ?
  - Was macht man , wenn man kein Resultat erhält ?
  - Wie kompliziert dürfen algebraische Terme sein, damit sie das CAS des TI-92 verarbeiten kann ?
  - Wann sind manuelle Umformungen notwendig, und wie weit muss man umformen ?
  - Wie überprüft man die Ergebniss des Rechners? Kann man der Kontrolle mit dem Rechner vertrauen ?
  - Wie erkennt man falsche Lösungen ?
  - Das CAS verlangt bestimmte Notationen, die von der Problemstellung her oder vom mathematischen Standpunkt aus nicht immer geeignet sind.
  - Welche Hilfsmittel sind bei einer Prüfung zugelassen ?
    Texteditor des Rechners: Teile der Formelsammlung, des Skripts oder des Rechnerhandbuchs können gespeichert werden.
  - Was oder wieviel müssen die SchülerInnen protokollieren ?
  - Es bieten sich auch neue Formen der Leistungsbeurteilung (Projekt- und Teamarbeit) an.
  - Wie kann man verschiedene Rechnerversionen in einer Klasse in den Griff bekommen?

Evaluation der SchülerInnen:

Wir haben bewusst auf einen Fragebogen für die SchülerInnen verzichtet. Sie sollten nicht durch unsere Fragen beeinflusst oder eingeengt werden. Ihre Beurteilung des Versuches sollten sie in der Form eines Essays darlegen. Dadurch erhofften wir ein unverfälschtes Stimmungsbild der SchülerInnen zu erhalten. Bei einem so eng begrenztem Experiment ist es auch kaum sinnvoll, mehr hineininterpretieren zu wollen.
Die objektive Auswertung der Essays war natürlich äusserst schwierig. Trotzdem zeigte es sich, dass einige Problemkreise von einem Grossteil der SchülerInnen erkannt und abgehandelt wurden.

- **Schulversuch mit dem TI-92**
  Dem Schulversuch mit dem TI-92 standen die SchülerInnen positiv gegenüber. Der Versuch wurde mehrheitlich begrüsst.

- **Beurteilung des Rechners TI-92**
  Der Rechner wird eher kritisch beurteilt. Die SchülerInnen vergleichen den TI-92 wohl eher mit den Möglichkeiten eines PCs als mit denen eines Taschenrechners. Erwähnt wurden :
  - Der Rechner ist zu unhandlich
  - Der Rechner ist zu teuer
  - Der Rechner ist zu wenig benutzerfreundlich
  - Der Rechner ist noch nicht voll funktionsfähig (Abstürze, zu langsam)
  - Alles ist Englisch (Handbuch)!!!

- **Mathematik - CAS des TI-92**
  Auch SchülerInnen, die den Einsatz des TI-92 grundsätzlich befürworten, weisen auf die Gefahren für die mathematische Bildung hin. Diese Bedenken sind überraschend. Dazu wurden meistens mehrere Punkte angeführt:
  - Die SchülerInnen verlieren mathematische Fertigkeiten.
  - Die SchülerInnen verlieren mathematische Einsichten.
  - Die SchülerInnen verlieren mathematische Grundkenntnisse.
  - Die SchülerInnen verlieren Erfolgserlebnisse.
  - Die SchülerInnen sind der Maschine ausgeliefert.

  Einige SchülerInnen ziehen aus diesen Bedenken den Schluss, dass das CAS jeweils erst dann eingesetzt werden sollte , wenn die Grundlagen erarbeitet und gefestigt sind.

  Der Einsatz des CAS als Hilfsmittel wird begrüsst oder als unvermeidlich erachtet. Einige wenige lehnen den Rechner oder die Technik in der Mathematik grundsätzlich ab.

- **Zeitpunkt der Einführung des TI-92**
  Nur wenige SchülerInnen machten sich Gedanken über den Zeitpunkt für die Einführung des CAS
  - 2 SchülerInnen befürworten einen frühen Einsatz (3. Klasse: 9. Schuljahr).
  - 2 SchülerInnen befürworten einen späten Einsatz (5. Klasse: 11. Schuljahr).

Literaturverzeichnis

[1] Bachmann Heinz, Einführung in die Analysis 3 Sabe, 1975

[2] Braun M., Differentialgleichungen und ihre Anwendungen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1979

[3] Burg Klemens / Haf Herbert / Wille Friedrich, Höhere Mathematik für Ingenieure I, B.G Teubner, Stuttgart, 1985

[4] DMK, Analysis, Orell Füssli Verlag Zürich und Wiesbaden, 1989

[5] DMK, Formeln und Tafeln, Orell Füssli Verlag Zürich und Wiesbaden, 1984

[6] Gerthsen Christian, Physik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1966

[7] Heuser Harro, Gewöhnliche Differentialgleichungen , B.G. Teubner Stuttgar, 1989

[8] Kirchgraber Urs, Differentialgleichungen in die Schule, Skriptum Departement Mathematik ETH Zürich, 1994

[9] Preckur Helmuth, Analysis 3, Mentor Verlag, München, 1988

[10] Storrer Hans Heiner, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986

[11] Strang Gilbert, Calculus, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1991

[12] Vogt Herbert, Grundkurs Mathematik für Biologen, B.G. Teubner, Stuttgart, 1983

Prof. U. Kirchgraber
Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89–01	H. Walser	Fraktale
89–02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89–03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89–04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90–01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90–02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
90–03	U. Kirchgraber	Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II
91–01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91–02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91–03	M. Federer	Preistheorie
91–04	M. Gauglhofer	Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen
92–01	U. Kirchgraber	Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen
93–01	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Annäherung an den Goldenen Schnitt
93–01(I)	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Approccio alla Sezione Aurea
93–02	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Perspektive und Axonometrie
93–02(I)	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Prospettiva e Assonometria
93–03	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Verzweigungsphänomene
93–03(I)	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Fenomeni di Biforcazione
93–04	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Der Fallschirmspringer
93–04(I)	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Il Paracadutista
93–05	H.R. Schneebeli	Alles fliesst – Mit dem Graphikrechner zu den Quellen der Analysis
93–06	H. Biner	Kongruenzabbildungen und Symmetrien im Euklidischen Raum
93–07	U. Kirchgraber	Hundert Jahre Störungstheorie – Differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev
94–01	U. Maurer	Kryptologie: Mathematik zwischen Anwendung und Ästhetik
94–02	H. Klemenz	Computergestützte Raumgeometrie
94–03	F. Barth	Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt - Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit
94–04	W. Henn	Auto und Verkehr – Beispiele aus der Analysis zum realitätsnahen Mathematikunterricht
95–01	N. Sigrist	Auf der Kippe

95–02	U.Kirchgraber	Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten.
	U. Kirchgraber, N. Sigrist	Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze
95–03	A. Gächter	Infinitesimalgeometrie - am Beispiel der Kreisevolvente
95–04	P. Gallin	Grund- und Aufrissmethode in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
95–05	P. Bolli	The unreasonable effectiveness of mathematics
95–06	G. Schierscher	Verfolgungsprobleme
96–01	W. Burgherr	Schwimmende Prismen mit Schlagseite
96–02	M. Struwe	Sattelpunkte oder Variationsprinzipien in Geometrie und Mechanik
96–03	M. Huber	Warum denn ist $\exp(x^2)$ nicht elementar integrierbar?
97-01	B. Eicke, E. Holzherr	Analysis – mit dem computer-Algebra-System des TI-92 (Preis: Fr. 8.- incl. MWSt)