Greedy

Teile und Herrsche

Eine Unterrichtseinheit von Judith Gull

Inhalt:
Das Leitprogramm behandelt zwei Methoden, mit denen Algorithmen für unterschiedliche Probleme entworfen werden können.

Unterrichtsmethode: Leitprogramm
Das Leitprogramm ist ein Selbststudienmaterial. Es enthält alle notwendigen Unterrichtsinhalte, Übungen, Arbeitsanleitungen und Tests, die die Schüler/innen brauchen, um ohne Lehrperson lernen zu können.

Fachliches Review:
Juraj Hromkovic, Informationstechnologie und Ausbildung, ETH Zürich

Fachdidaktisches Review:
Juraj Hromkovic, Informationstechnologie und Ausbildung, ETH Zürich

Publiziert auf EducETH:
29. Juni 2007

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Verhaltenswissenschaft
Departement Informatik

"Greedy" und "Teile und Herrsche"

Ein Leitprogramm in Informatik

Zielgruppe: Gymnasium
Bearbeitungsdauer: ca. 8 Stunden

Autorin: Judith Gull
Betreuer: Prof. J. Hromkovič

Fassung vom: 15. Januar 2007

Dieses Leitprogramm wurde noch nie erprobt.

Einführung

In diesem Leitprogramm lernst du zwei Methoden kennen, mit denen Algorithmen für unterschiedliche Probleme entworfen werden können.

Das Leitprogramm besteht aus zwei Teilen. Die ersten beiden Kapitel behandeln die sogenannte "Greedy-Methode". In den Kapiteln 3 und 4 wird die "Teile-und-Herrsche" Methode erläutert.

Was kannst du nach diesem Leitprogramm?

Du kannst die oben genannten Methoden anwenden, um Algorithmen zu entwerfen. Du kennst auch Beispiele für Probleme, die sich damit gut lösen lassen.

Vorkenntnisse

Programmieren

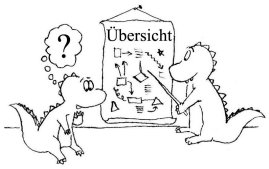
Um dieses Leitprogramm erfolgreich bearbeiten zu können, brauchst du grundlegende Programmierkenntnisse.

Die Lösungen für die Programmieraufgaben sind in Java geschrieben. Bei einigen Aufgaben musst du bestehenden Java Code ergänzen. Du solltest deshalb Variablen, Schleifen, Kontrollstrukturen und Arrays kennen und wissen, wie man sie in Java einsetzt.

Mathematik

Die Begriffe Menge und Funktion sollten dir bekannt sein.

Arbeitsanleitung:



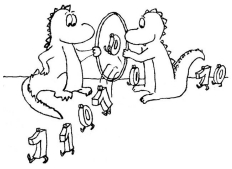
Übersicht: Zu Beginn jedes Kapitels wird kurz beschrieben, worum es geht. Hier erfährst du, was du im jeweiligen Kapitel tun wirst.

Lernziele: Anschliessend werden die Lernziele aufgelistet. Hier steht beschrieben, was du in diesem Kapitel lernen sollst und was danach im Test geprüft wird.

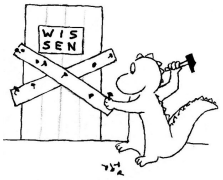
In jedem Kapitel wirst du zwischendurch gebeten, Aufgaben zu lösen:

Aufgabe

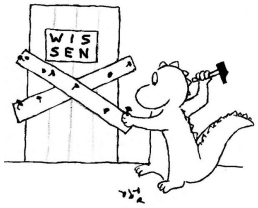
Programmieraufgabe



Partneraufgabe: Zu zweit zu lösen!



Wissenssicherung: Hast du wirklich alles verstanden?



Lernkontrolle: Am Schluss jedes Kapitels kannst du prüfen, ob du alles verstanden hast.

Test: Nach den ersten beiden Kapiteln zum Thema Greedy Algorithmen, meldest du dich bei deinem Lehrer zum Test. Auch nach Abschluss des vierten Kapitels erwartet dich ein Test.

Lösungen: Am Ende des Leitprogramms sind die Lösungen aufgeführt.

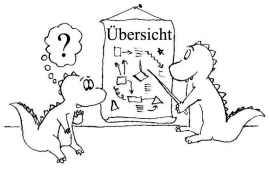
Inhaltsverzeichnis

Teil I

Greedy-Algorithmen

Kapitel 1

Getränkeautomaten und Rucksäcke



Übersicht

Worum geht es?

In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, mit der Algorithmen entworfen werden können. Sie heisst **Greedy-Methode**, auf deutsch gierige Methode. Ein Algorithmus, der nach dieser Methode vorgeht, heisst entsprechend **Greedy-Algorithmus**. Du wirst nun das Prinzip der Greedy-Methode kennen lernen und es an mehreren Beispielen anwenden.
Mit der Greedy-Methode kannst du Algorithmen für viele praxisrelevante Probleme entwerfen. Greedy-Algorithmen sind meistens relativ einfach zu verstehen und zu implementieren.

Was tust du hier?

Lies das Kapitel durch und versuche die Aufgaben zu lösen. Es ist wichtig, dass du nicht weiter liest, bevor du die Aufgaben gelöst und verstanden hast. Es erwartet dich auch eine Programmieraufgabe, die du am Computer durchführen sollst.

Lernziele

Am Schluss dieses Kapitels sollst du:

- Das Prinzip der Greedy-Methode verstehen.
- Die Greedy-Algorithmen für das Rückgeldproblem und das Rucksackproblem kennen.
- Für ein gegebenes Problem selbst einen Greedy-Algorithmus entwerfen und implementieren können.

1.1 Ein Getränkeautomat

Greedy Algorithmen sind nützlich, um ein Maximum oder ein Minimum zu suchen. Vielleicht hast du schon das Minimum und Maximum einer Funktion berechnet, indem du die Funktion abgeleitet hast. Darum geht es aber hier nicht. Die Greedy-Methode benützt eine andere Strategie, mit welcher z.B. auch das Maximum und Minimum von nicht ableitbaren Funktionen berechnet werden kann.

Ein Beispiel:

An einem Getränkeautomat kann man verschiedene Getränke kaufen.

	Getränk	Preis (CHF)
1	Kaffee	2.30
2	Tee	2.20
3	Mineralwasser	1.10

Der Automat funktioniert so:
Wird die Nummer eines Getränkes gedrückt, erscheint der Preis des Getränkes. Nun kann der Betrag eingeworfen werden. Danach wird das Getränk und das Rückgeld ausgegeben.

Folgende Münzen können eingeworfen werden: 

Das Rückgeld besteht ebenfalls aus diesen Münzen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass immer genügend Münzen im Automat vorhanden sind.

⇒ Der Automat soll jetzt so programmiert werden, dass er für jeden Betrag möglichst wenige Münzen zurück gibt!

In diesem Beispiel geht es darum, ein Minimum zu suchen: Die **Anzahl Münzen**, die der Automat zurück gibt, soll minimiert werden.

Aufgabe 1

Kann der Automat auf jeden Betrag Rückgeld herausgeben? Begründe!

Aufgabe 2

Ein Kunde wählt Kaffee und wirft 3.- ein. Suche alle möglichen Münzkombinationen, mit denen das korrekte Rückgeld bezahlt werden kann! Welche dieser Kombinationen stellt die kleinste Anzahl Münzen dar und ist somit optimal?

Aufgabe 3

Welches ist die minimale Anzahl Münzen, die der Automat auswirft, wenn man für ein Mineralwasser 2.- bezahlt?

Das Rückgeldproblem kann auch anders formuliert werden:

1. Von jeder Münzenart nehmen wir eine bestimmte Anzahl. Die Summe aller dieser Münzen muss gleich dem Rückgeldbetrag R sein, d.h.:
$$a \cdot 5 + b \cdot 2 + c \cdot 1 + d \cdot 0.5 + e \cdot 0.2 + f \cdot 0.1 = R$$
2. a, b, c, d, e, f müssen ganze Zahlen sein.
3. Die Anzahl der Münzen soll minimal sein: *minimiere* $a + b + c + d + e + f$

Aufgabe 4

Schau nochmals die Aufgabe 2 an. Welche Werte haben dort a, b, c, d, e, f?

1.2 Die gierige Vorgehensweise

Das Prinzip der Greedy Methode ist im Grunde recht einfach und funktioniert so:
Die Lösung wird in mehreren Schritten bestimmt. Bei jedem Schritt wird versucht, die vielversprechendste Möglichkeit auszuwählen. Daher stammt der Begriff gierig ("greedy").

Ein Beispiel:
Erinnerst du dich an das Beispiel im letzten Abschnitt? Der Getränkeautomat soll für den Rückgeldbetrag B_0 möglichst wenige Münzen herausgeben. Im Folgenden wird die Greedy-Methode angewendet:

B bezeichnet immer den Betrag, den der Automat noch herausgeben muss.

- $B =$ Rückgeldbetrag B_0, (noch keine Münzen herausgegeben)
- wiederhole:
  - Falls $B = 0$, dann sind wir fertig.
  - Sonst gib die grösstmögliche Münze M aus, die nicht grösser ist als B und setze $B = B - M$

Angenommen, der Automat müsste einen Betrag von 7 Franken herausgeben.

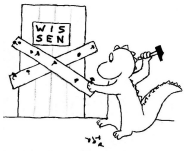
- Du setzt $B = 7$.
- Die grösste Münze, die höchstens 7 Franken ist, ist der Fünfliber ($M = 5$). Wir geben ihn aus und setzen $B = 7 - 5 = 2$.
- Die nächste Münze, die wir ausgeben ist ein Zweifränkler ($M = 2$). B setzen wir neu auf $B = 2 - 2 = 0$.
- Nun bist du fertig, da $B = 0$ ist. Insgesamt wurden zwei Münzen herausgegeben.

Greedy-Methode

Man startet mit Nichts: Mit der leeren Teillösung.

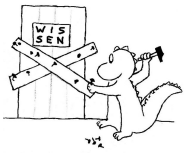
Dann wird im nächsten Schritt gierig immer die Teillösung hinzugenommen, die am besten scheint.

Dies wird solange wiederholt, bis die ganze (optimale) Lösung gefunden ist.



Wissenssicherung 1

Der Automat soll 1.80.- Rückgeld geben. Wende den Greedy-Algorithmus an!



Wissenssicherung 2

Erkläre deiner Banknachbarin mit eigenen Worten, wie das Prinzip eines Greedy-Algorithmus funktioniert.

Programmieraufgabe 5

Implementiere den Greedy-Algorithmus für das Rückgeldproblem. Benütze dazu die Datei Automat.java und ergänze die Methode rueckgeld. Zur Vereinfachung kannst du das Geld immer in Rappen speichern.
Die möglichen Münzen und die Preise der Getränke sind in zwei Arrays gespeichert:

```
private static int [] Muenzen;
private static int [] Getraenke;
```

Die Rückgeldmünzen kannst du auf der Konsole ausgeben:

```
System.out.println(...);
```

Die Methode rueckgeld hat als Argument den Betrag, den der Kunde bezahlt und die Nummer des Getränks.

```
public static void rueckgeld(int betrag, int nummer){
  ...
}
```

Kompiliere Automat.java und teste, ob alles richtig läuft!

Aufgabe 6

Stell dir vor, dass in einem Land nur die Münzen 41, 20 und 1 existieren. Ein Automat, der den Greedy-Algorithmus von vorher verwendet, soll 60 zurückzahlen. Welche Münzen gibt er aus? Ist diese Lösung optimal?

Aufgabe 7

- Du befindest dich immer noch im Land mit den Münzen 41, 20 und 1. Suche einen Betrag, für den der Greedy-Algorithmus nicht die optimale Lösung liefert.
- Suche drei andere Münzen, für die der Greedy-Algorithmus nicht für alle Beträge die optimale Lösung liefert. Gib auch den Betrag an, für den Greedy nicht funktioniert.

Leider funktioniert die Greedy-Methode nicht für alle Probleme. Manchmal findet ein Greedy-Algorithmus nicht die gewünschte Lösung, also nicht das Minimum oder Maximum. Das hast du in den vorherigen Aufgaben gesehen.

Rucksack Problem

Ein Dieb besitzt einen Rucksack, der höchstens 50 kg Last tragen kann. Der Dieb möchte seinen Rucksack so füllen, dass sein Profit möglichst hoch ist. Es stehen die folgenden Gegenstände zur Verfügung:

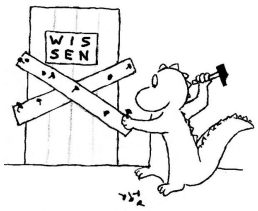
Gegenstand	Wert	Gewicht
1	200	40
2	120	20
3	120	30

Aufgabe 8

Entwickle einen Greedy-Algorithmus für dieses Problem. Wie lautet die optimale Lösung?

Gegenstand	Wert	Gewicht
1	60	10
2	100	20
3	120	30

Wie lautet die optimale Lösung und die Lösung deines Greedy-Algorithmus für diese Gegenstände?



Lernkontrolle

Ein Wanderer füllt seinen Rucksack mit Gegenständen.

Für ihn hat jeder Gegenstand einen bestimmten Wert pro Volumen. Schokolade ist ihm z.B. wichtiger als Brot aber weniger wichtig als Wasser.

Die Gegenstände kann man alle beliebig teilen. Er kann z.B. nur $0.5l$ Orangensaft einpacken oder eine halbe Tafel Schokolade, die etwa ein Volumen von $0.1l$ hat.

Natürlich ist nicht von jedem Gegenstand beliebig viel vorhanden. Der Wanderer hat z.B. nur eine Tafel Schokolade zu Hause und in seine Trinkflasche kann er höchstens $1.5l$ Wasser einfüllen.

Das Volumen des Rucksacks beträgt $5l$.

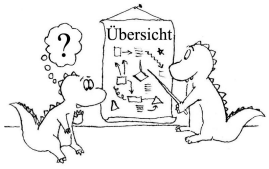
Gegenstand	Wert (pro Liter)	Vorhandenes Volumen (in Liter)
Wasser	5	1.5
Schokolade	4	0.2
Orangensaft	3	2
Brot	2	2
Aufschnitt	1	0.1
Gurke	1	0.5

1. Wie muss der Wanderer seinen Rucksack füllen, damit er einen möglichst grossen Wert erreichen kann? Wie gross ist dieser Wert?

2. Entwickle einen Greedy-Algorithmus für dieses Problem. Findet dein Algorithmus immer die optimale Lösung?

Kapitel 2

Strassen planen und durch Städte reisen



Übersicht

Worum geht es?

Im letzten Kapitel hast du gesehen, dass Greedy-Algorithmen nicht immer funktionieren. Für manche Probleme finden sie das Minimum oder das Maximum nicht.

Oft ist aber die Lösung, die der Greedy-Algorithmus findet, gar nicht so schlecht. Bei Problemen, die sehr schwierig zu lösen sind, kann man oft mit der Lösung zufrieden sein, die der Greedy-Algorithmus liefert. In diesem Kapitel wirst du ein solches Beispiel kennenlernen.

Zuerst lernst du aber nochmals ein Beispiel kennen, das der Greedy-Algorithmus gut zu bewältigen vermag.

Was tust du hier?

Für dieses Kapitel brauchst du Zugriff aufs Internet. Du wirst Applets und (zusammen mit einem/r Kollegen/Kollegin) ein Java Programm benutzen. Die meis-

ten Aufgaben sind auf Papier lösbar. Du kannst einen Taschenrechner benutzen.

Lernziele

1. Wissen, was ein Minimaler Spannbaum ist und wie man ihn berechnet.
2. Das Travelling Salesman Problem kennen und wissen, wie man mit Hilfe eines Minimalen Spannbaums eine Approximation dafür findet.

2.1 Strassen planen

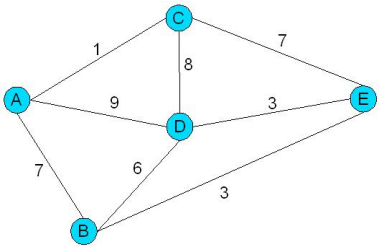
Stell dir vor, du müsstest bei der Planung eines neuen Strassennetzes mithelfen. Dörfer, zu denen heute noch keine befahrbare Strasse führt, sollen durch neue Strassen verbunden werden. Der Strassenbau kann teilweise sehr teuer werden. Je nach Situation müssen Brücken oder Tunnels gebaut werden.
Deine Aufgabe ist es, eine möglichst billige Lösung zu finden, so dass jedes Dorf von jedem anderen aus erreichbar ist.

In diesem Plan sind die Dörfer eingezeichnet und die möglichen Strassen. Neben jeder Strasse steht der geschätzte Preis (in 100000 CHF).

Aufgabe 1

Markiere im obigen Plan die Strassen, die du bauen würdest! Wie hoch sind die totalen Kosten für deine Lösung?

Strassennetz anders dargestellt



Das Strassennetz kann auch als Graph dargestellt werden. Ein Graph besteht aus Knoten und Kanten, die die Knoten verbinden.
Wird jeder Kante ein Wert zugeordnet, nennt man diesen Graphen gewichtet.

Die Knoten entsprechen den Dörfern, die Kanten den möglichen Strassen. Die Werte, die den Kanten zugeordnet wurden, entsprechen den geschätzten Kosten für den Bau der jeweiligen Strasse.

Die Knotenmenge ist also hier:

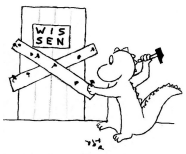
$$V = \{A, B, C, D, E\}$$

Eine Kante kann durch ihre Eckpunkte beschrieben werden. Die Kantenmenge ist:

$$E = \{(A, B), (A, C), (A, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$$

Ein gewichteter Graph hat also

- eine Knotenmenge V
- eine Kantenmenge E. E ist eine Menge von Knotenpaaren aus V
- eine Funktion f, die jeder Kante einen Wert zuordnet



Wissenssicherung 1

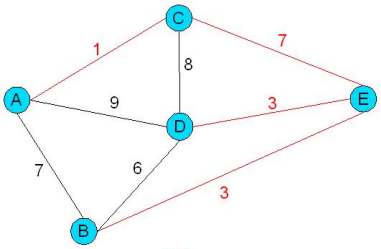
Zeichne einen gewichteten Graphen mit der Knotenmenge V, der Kantenmenge E und der Gewichtsfunktion f!

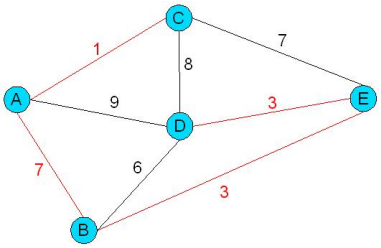
$$V = \{a, b, c, d\} \quad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$e_1 = (a, b), \quad e_2 = (a, d), \quad e_3 = (c, d) \quad e_4 = (b, c),$

$f(e_1) = 7, \quad f(e_2) = 6, \quad f(e_3) = 5 \quad f(e_4) = 4$

Die beste Lösung:

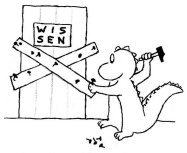




Um das Strassenplanungsproblem zu lösen, muss man eine **Teilmenge der Kanten** auswählen.

Eine Bedingung ist, dass jeder Knoten in mindestens einer Kante enthalten ist. Sonst wären nicht alle Dörfer ans Strassennetz angeschlossen.

Nun wird diejenige Teilmenge der Kanten (Strassen) gesucht, die die kleinsten totalen Kosten aufweist. D.h. die Summe der Werte der Verbindungslinien soll minimal sein.



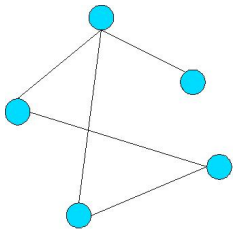
Wissenssicherung 2

Wie lautet bei diesen zwei Lösungen die Teilmenge der ausgewählten Kanten? Teste, ob die oben genannte Bedingung zutrifft.

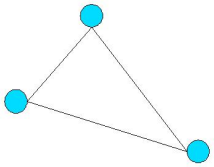
Ein Baum?

Aufgabe 2

Ein Strassenplaner hat einen Vorschlag eingereicht. Sein Vorschlag enthält einen Zyklus. Das heisst, man kann von einem Punkt A über andere Punkte wieder zu A zurückfahren.



Zyklus

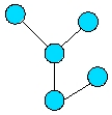


Zyklus

kein Zyklus

Was kannst du tun, um eine solche Lösung zu verbessern?

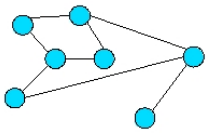
Spannbaum



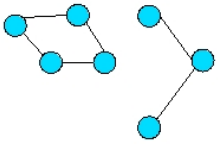
Baum

Wenn ein Graph keinen Zyklus enthält und zusammenhängend ist, dann nennt man ihn auch einen **Baum**.

Ein Graph ist zusammenhängend, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.



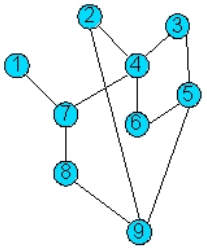
zusammenhängend



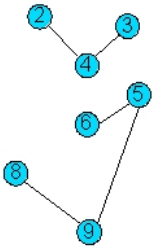
nicht zusammenhängend

Ein Graph T ist ein **Teilgraph** eines Graphen G, falls

- die Knotenmenge von T eine Teilmenge der Knotenmenge von G ist und falls
- die Kantenmenge von T eine Teilmenge der Kantenmenge von G ist.



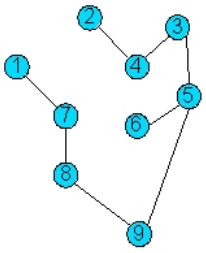
(a) Graph G



(b) Teilgraph T von G

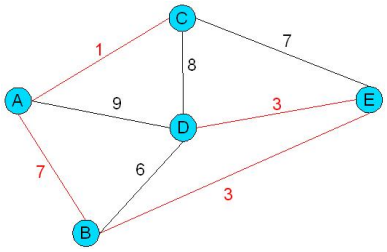
Ein **Spannbaum** ist ein besonderer Teilgraph: Ein Graph heisst Spannbaum von G, wenn er

- ein Teilgraph von G ist
- alle Knoten von G enthält
- ein Baum ist

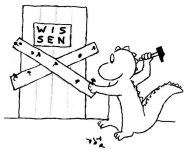


(c) Spannbaum von G

Um das Strassenplanungsproblem zu lösen, muss also ein Spannbaum zu dem Graphen gefunden werden, der das Strassennetz darstellt. Ausserdem sollen die Kosten minimal sein, d.h. die Summe der Gewichte des Spannbaums soll minimal sein. Ist dies der Fall, dann nennt man den Spannbaum auch **Minimalen Spannbaum** oder kurz **MST** (Minimum Spanning Tree).

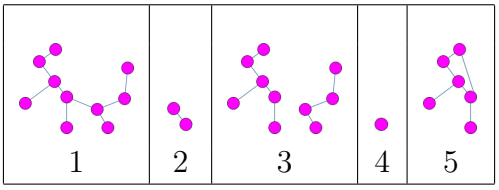


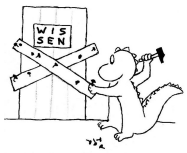
(d) Minimaler Spannbaum



Wissenssicherung 3

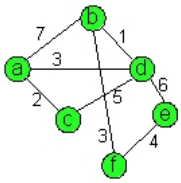
Welche dieser Beispiele sind Bäume?

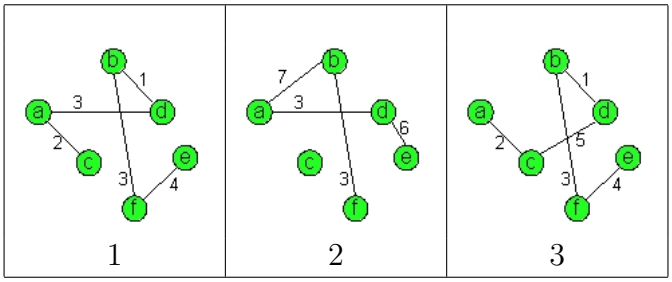




Wissenssicherung 4

Welche der folgenden Beispiele sind Spannbäume dieses Graphen? Welches sind minimale Spannbäume?





Anzahl Spannbäume

Die Anzahl der Spannbäume wächst für viele Kanten schnell an. Ein Graph mit n Knoten kann n^{n-2} Spannbäume haben. Es macht deshalb keinen Sinn, alle Spannbäume durchzugehen und dann den Kleinsten zu berechnen. Für grosse Graphen benötigt man dazu viel Rechenzeit. Es ist besser, einen Greedy-Algorithmus einzusetzen.

$\boldsymbol{n}$	5	6	10	50
$\boldsymbol{n^{n-2}}$	125	1296	10^8	$3.6 * 10^{81}$

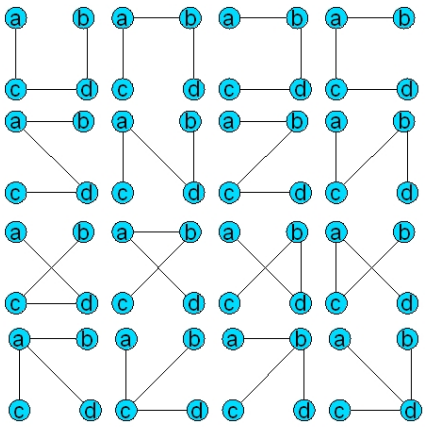
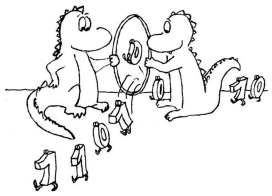


Abbildung 2.1: Alle möglichen Spannbäume für einen Graphen mit 4 Knoten



2.2 Partnerarbeit: Greedy-Algorithmen zur Berechnung des minimalen Spannbaums

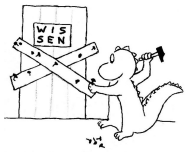
Algorithmus von Kruskal

Für folgende Aufgabe braucht es Zugang zum Internet. Benützt dazu das Applet auf

http://gilco.inpg.fr/ rapine/Graphe/Arbre/kruskalApplet.html[?]

Aufgabe 3

Lasst das Applet laufen und versucht herauszufinden, wie der Algorithmus von Kruskal funktioniert. Beschreibt den Algorithmus als Text oder in Pseudocode!



Wissenssicherung 5

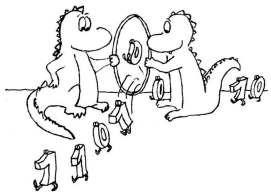
Um euch den Algorithmus von Kruskal nochmals einzuprägen, bietet sich ein weiteres Applet an. Hier könnt ihr selber Graphen zeichnen.
Vorgehensweise: Einer von euch zeichnet einen Graphen. Der andere erläutert, wie der Algorithmus in diesem Beispiel funktioniert.

Ihr könnt schrittweise testen, ob ihr richtig liegt.

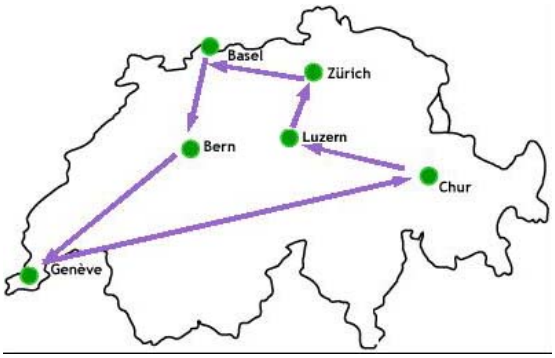
http://links.math.rpi.edu/applets/appindex/graphtheory.html[**?**]!

Hinweise zur Bedienung:

- Setzt den Algorithmus auf "Kruskal's Algorithm".
- Knoten hinzufügen: "add Vertex" einstellen und klicken.
- Kanten hinzufügen: "add Undirected Edge" einstellen und auf den Anfangs- und Endknoten klicken.
- Gewichte hinzufügen: "Modify Edge or Vertex" einstellen und eine Kante doppelklicken. Das Feld "Weight" ändern. Das Feld "Capacity" nicht ändern.



2.3 Partnerarbeit: Der Handelsreisende



Ein Handelsreisender plant eine Rundreise durch einige Städte, um seine Waren zu verkaufen.

Jede Stadt will er genau einmal besuchen. Am Schluss möchte er wieder in seine Heimatstadt zurückkehren.

Soweit scheint sein Vorhaben einfach. Doch der Handelsreisende will eine möglichst kurze Strecke zurücklegen, um Zeit und Reisekosten zu sparen. Er stellt sich nun die Frage, in welcher Reihenfolge er die Städte besuchen soll.
Dieses Problem heisst auf englisch *travelling salesman problem* oder kurz ***TSP***.

Aufgabe 4

Auf http://www.ibl-unihh.de/tsp/applet.html werden euch drei TSP Probleme gestellt mit Städten in Europa. Befolgt die Anweisungen, die dort stehen. Anschliessend werden noch drei weitere Probleme gestellt. Die müsst ihr nicht lösen!

GraphBench Software [?]

Um das Problem des Handelsreisenden genauer kennenzulernen, sollt ihr die Software GraphBench benutzen. Ihr könnt GraphBench unter

http://www.inf.ethz.ch/personal/braendle/graphbench-de/download.html

herunterladen. Doppelklickt das File graphbench.jar, um Graphbench zu starten und klickt auf "Travelling-Salesman Problem"!

Aufgabe 5

Mit GraphBench könnt ihr selber ein TSP Problem erzeugen. Ihr könnt mit einem Doppelklick Punkte in die Ebene setzen.

Die Lösung wird berechnet, wenn ihr auf das Icon  klickt.

Sucht nach einem Greedy-Algorithmus, der das TSP Problem möglichst gut löst! Versucht danach ein Beispiel zu finden, für welches euer Algorithmus nicht funktioniert.

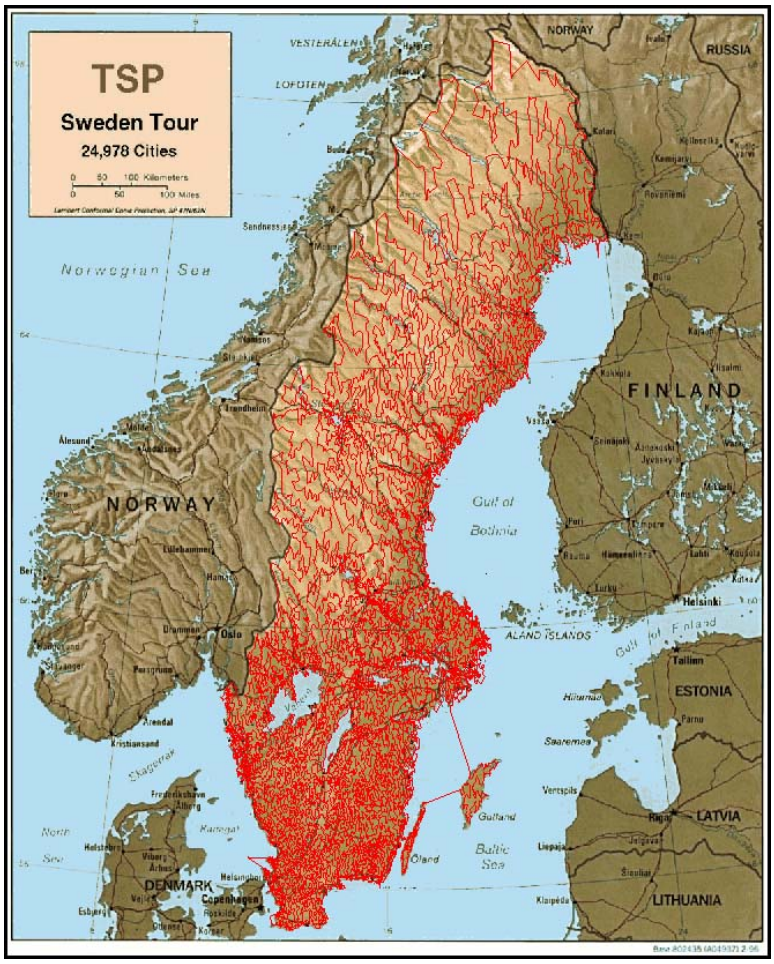


Abbildung 2.2: TSP für 24978 Städte in Schweden [?]

2.4 TSP - Ein Schwieriges Problem

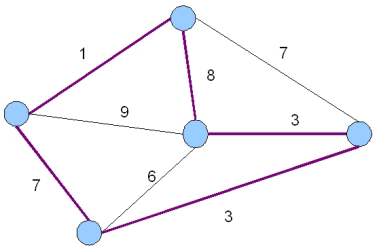
Vielleicht habt ihr bemerkt, dass GraphBench lange braucht, um die Lösung zu finden, wenn viele Knoten gegeben sind. Das liegt daran, dass bei diesem Algorithmus die Länge für alle möglichen Rundreisen berechnet wird.

Aufgabe 6

Zeichne alle möglichen verschiedene Rundreisen mit 4 Knoten! (Richtung und Startknoten spielen keine Rolle). Wie viele wären es für einen Graphen mit n Knoten?

Varianten des TSP

Bisher haben wir die Länge einer Kante immer gleich dem Abstand der zwei Endknoten gesetzt. Wir werden auch weiterhin nur diesen Fall betrachten. Man könnte aber auch die kürzeste Rundreise für einen Graphen mit anderen Längen (Gewichten) berechnen. Ähnlich wie beim minimalen Spannbaum. Solchen und anderen Varianten wirst du vielleicht begegnen, wenn du Literatur zu TSP liest.



Mehr Information über TSP

Die Forschung über TSP hat in den 30er Jahren begonnen. Seither wurde und wird immer noch sehr viel Forschungsaufwand betrieben, um TSP zu lösen. Es wurden auch sehr grosse Fortschritte gemacht. 1954 ist TSP erstmals für 49 Städte der USA gelöst worden. Damals eine gute Leistung. 50 Jahre später für 24978 schwedische Städte.

Year	Research Team	Size of Instance	Name
1954	G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson	49 cities	dantzig42
1971	M. Held and R.M. Karp	64 cities	64 random points
1975	P.M. Camerini, L. Fratta, and F. Maffioli	67 cities	67 random points
1977	M. Grötschel	120 cities	gr120
1980	H. Crowder and M.W. Padberg	318 cities	lin318
1987	M. Padberg and G. Rinaldi	532 cities	att532
1987	M. Grötschel and O. Holland	666 cities	gr666
1987	M. Padberg and G. Rinaldi	2,392 cities	pr2392
1994	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, and W. Cook	7,397 cities	pla7397
1998	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, and W. Cook	13,509 cities	usa13509
2001	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, and W. Cook	15,112 cities	d15112
2004	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook, and K. Helsgaun	24,978 cities	sw24798

Rekorde für TSP [**?**]

Dieser Fortschritt ist nicht nur auf schnellere Prozessoren zurückzuführen, sondern vor allem auch auf bessere Lösungsmethoden. Es gibt sehr viele verschiedene davon.

Falls du Interesse hast, mehr über TSP zu erfahren, dann schau im Internet nach. Eine gute Seite ist z.B.: http://www.tsp.gatech.edu/ (auf Englisch)

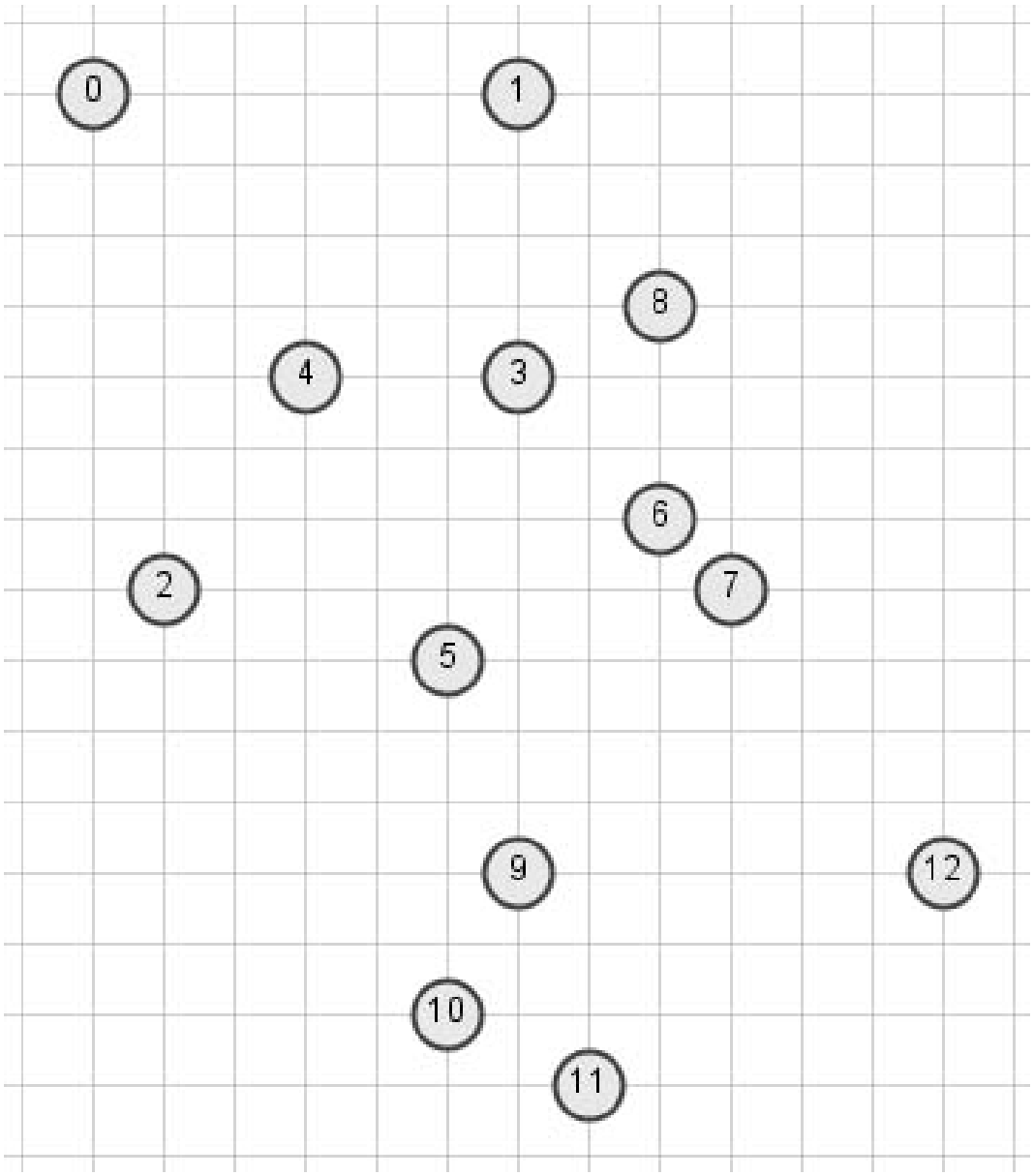
2.5 MST als Approximation für TSP

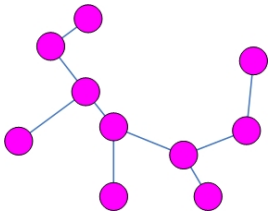
Mit Hilfe eines minimalen Spannbaums kann man für einen Graphen eine (ziemlich kleine) Rundreise berechnen. Nennen wir sie MST-Tour. Die MST-Tour ist nicht unbedingt die Kleinste. Sie ist also nicht die optimale Lösung des Travelling Salesman Problems.
Kennt man die MST-Tour eines Graphen, weiss man, dass die optimale Lösung kleiner sein muss als die Lösung der MST-Tour.
Die MST-Tour ist also nur eine Näherung der optimalen Lösung. Man nennt eine solche Näherung auch **Approximation**.
Im letzten, freiwilligen Abschnitt dieses Kapitels wird gezeigt, dass die MST-Tour

höchstens doppelt so gross sein kann, wie die optimale Tour.

Aufgabe 7

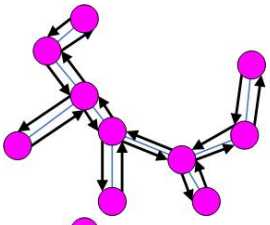
Befolge die Anleitung auf der nächsten Seite und führe sie am folgenden Beispiel durch. Du kannst ins Bild zeichnen.



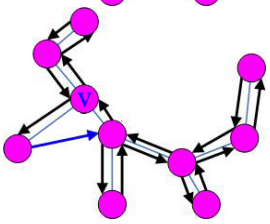


1. Berechne einen minimalen Spannbaum für den Graphen, bei dem alle Städte (Knoten) miteinander verbunden sind. Das Gewicht einer Kante ist jeweils gleich der Länge dieser Kante.

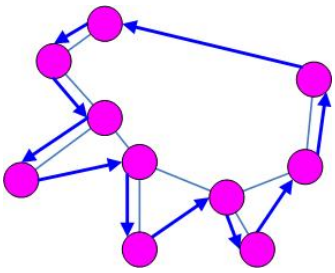
2. Aus dem minimalen Spannbaum bekommst du eine Rundreise, indem du aussen um den Baum herum gehst.
Hier gibt es Knoten, die mehrmals besucht werden. Das kannst du nun schrittweise ändern:



3. Wähle einen Knoten v aus, zu dem mehr als eine Kante führt. Wähle auch eine Kante aus, die zum Knoten hinführt e = (u, v) und eine, die vom Knoten wegführt f = (v, w).
Ersetze diese zwei Kanten durch eine kürzere: g = (u,w).



4. Wiederhole Schritt 3, bis kein Knoten mehr als eine eingehende Kante hat.



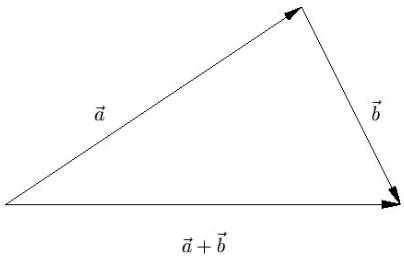
Aufgabe 8

Zu Schritt 2: Du hast den minimalen Spannbaum gegeben als einen Array von Knoten und einen Array von Kanten. Wie berechnest du jetzt diese Rundreise aussen herum? Schreibe deine Lösung in Pseudocode oder in Java auf!

Wie gut ist die Approximation? (freiwillig)

Nennen wir die Länge des minimalen Spannbaums MST. Die Länge der Rundreise, die man mit der obigen Anleitung erhält, nennen wir $MSTTour$. Die Länge der kürzesten Rundreise bezeichnen wir $OPTTour$

In Schritt 2 erhalten wir eine Tour, die genau 2 mal so lang (teuer) ist wie MST. Wenn wir Schritt 3 anwenden, wird die Tour nie länger. Warum das so ist, zeigt die Dreiecksungleichung.



Dreiecksungleichung: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Beobachtung 1:
Wir können daraus schliessen, dass

$$MSTTour \leq 2MST$$

Beobachtung 2:
Wenn wir von der optimalen Tour irgendeine Kante wegnehmen, ist das Resultat nicht grösser als der minimale Spannbaum.

$$OPTTour - Länge_{irgendeineKante} \geq MST$$

Aufgabe 9

Überlege, weshalb die Beobachtung 2 stimmen muss. Überlege dir den Fall $OPTTour - irgendeineKante < MST$!

Hinweis: $OPTTour - Länge_{irgendeineKante}$ ist ein Baum. Denn wenn aus einer Rundreise eine Kante weggenommen wird, ergibt sich kein Zyklus mehr. $OPTTour - Länge_{irgendeineKante}$ ist sogar ein Spannbaum, denn es werden alle Knoten besucht.

Aus der Beobachtung 2 lässt sich schliessen, dass

$$OPTTour \geq MST + Länge_{kleinsteKante}$$

Aus der Beobachtung 1 lässt sich schliessen, dass

$$MST \geq \frac{1}{2} MSTTour$$

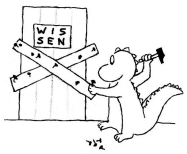
Also ist

$$OPTTour \geq \frac{1}{2} MSTTour + Länge_{kleinsteKante} \geq \frac{1}{2} MSTTour$$

Schlussendlich erhält man die Ungleichung

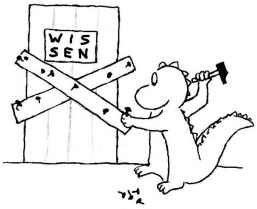
$$\boxed{MSTTour \leq 2OPTTour}$$

⇒ **Die MSTTour ist also höchstens doppelt so lange wie die optimale Tour!**



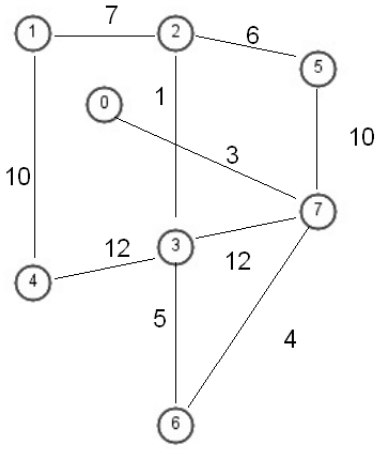
Wissenssicherung 6

Suche dir einen Kollegen oder eine Kollegin und erkläre ihm/ihr in wenigen Sätzen, warum die Approximation mit dem minimalen Spannbaum höchstens doppelt so lange wie die optimale Tour sein kann.

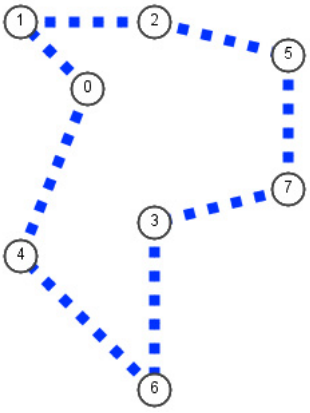


Lernkontrolle

Zeichne den minimalen Spannbaum für den folgenden Graphen ein. Kannst du damit eine gute Näherung für das Problem des Handelsreisenden finden?



Hier ist die optimale Lösung für das Problem des Handelsreisenden eingezeichnet. Kannst du mit dem minimalen Spannbaum von vorher diese Lösung approximieren?

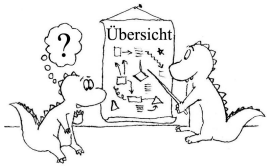


Teil II

Teile und Herrsche

Kapitel 3

Suchen und anderes



Übersicht

Worum geht es?

Du lernst hier eine zweite Entwurfsmethode für Algorithmen kennen. Sie heisst "Teile und Herrsche" (auf Englisch: divide and conquer) Die Idee ist die Folgende: Man versucht ein Problem aufzuteilen in kleinere Teilprobleme, bis diese so klein sind, dass sie einfach lösbar sind. Aus den Lösungen der Teilprobleme berechnet man dann die Lösung des ursprünglichen Problems.

Was tust du hier?

Arbeite wie gewohnt das Kapitel durch. Du findest darin eine Partnerarbeit und mehrere Programmieraufgaben. Für eine der Aufgaben benötigst du Jasskarten.

Lernziele

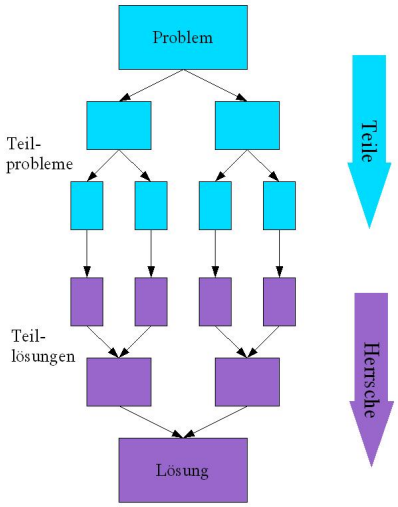
Am Ende des Kapitels sollst du die Teile-und-Herrsche Methode verstehen. Du sollst auch mindestens zwei Beispiele dafür kennen.

3.1 Minimum und Maximum gleichzeitig berechnen

Bei der Teile-und-Herrsche Methode nützt man die Tatsache aus, dass man kleinere Probleme einfacher lösen kann als grosse.

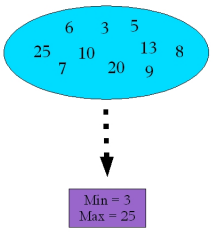
Das Grundprinzip der Entwurfsmethode Teile-und-Herrsche funktioniert so:

1. Teile: Zerlege das Problem rekursiv in Teilprobleme, bis die Teilprobleme so klein sind, dass sie einfach zu lösen sind.
2. Herrsche: Löse die Teilprobleme
3. Herrsche: Setze die Teillösungen wieder zu einer Gesamtlösung zusammen



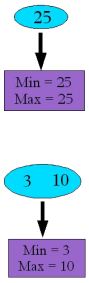
Beispiel: Kleinstes und grösstes Element einer Menge

Für eine Menge von Zahlen soll gleichzeitig das kleinste Element Min und grösste Element Max gesucht werden. Wie man dieses Problem mit der Teile-und-Herrsche Methode löst, zeigt die folgende Anleitung:



Anleitung:

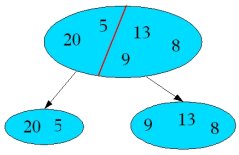
Falls die Menge nur ein Element e hat, dann ist dieses gleichzeitig das Minimum und das Maximum. Setze $Min = e$ und $Max = e$.



Für eine Menge mit zwei Elementen (e_1 und e_2) kann mit einem Vergleich herausgefunden werden, welches das Minimum und welches das Maximum ist.

```
if(e1 < e2){Min = e1; Max = e2; }
else {Min = e2; Max = e1;}
```

Falls die Menge mehr als zwei Elemente hat, dann teile sie auf in zwei etwa gleich grosse Teilmengen.



Für diese beiden Teilmengen müssen wir nun dasselbe Problem lösen wie für unsere Anfangsmenge. Wir wollen nämlich je das kleinste und das grösste Element für beide Teilmengen kennen. Befolge also diese Anleitung für jede Teilmenge. Als Resultat bekommst du je ein kleinstes und ein grösstes Element $(Min1, Max1, Min2, Max2)$. Daraus kannst du Min und Max der Anfangsmenge herausfinden.

```
if(Min1 < Min2){Min = Min1}
else{Min = Min2}

if(Max1 > Max2){Max = Max1}
else{Max = Max2}
```

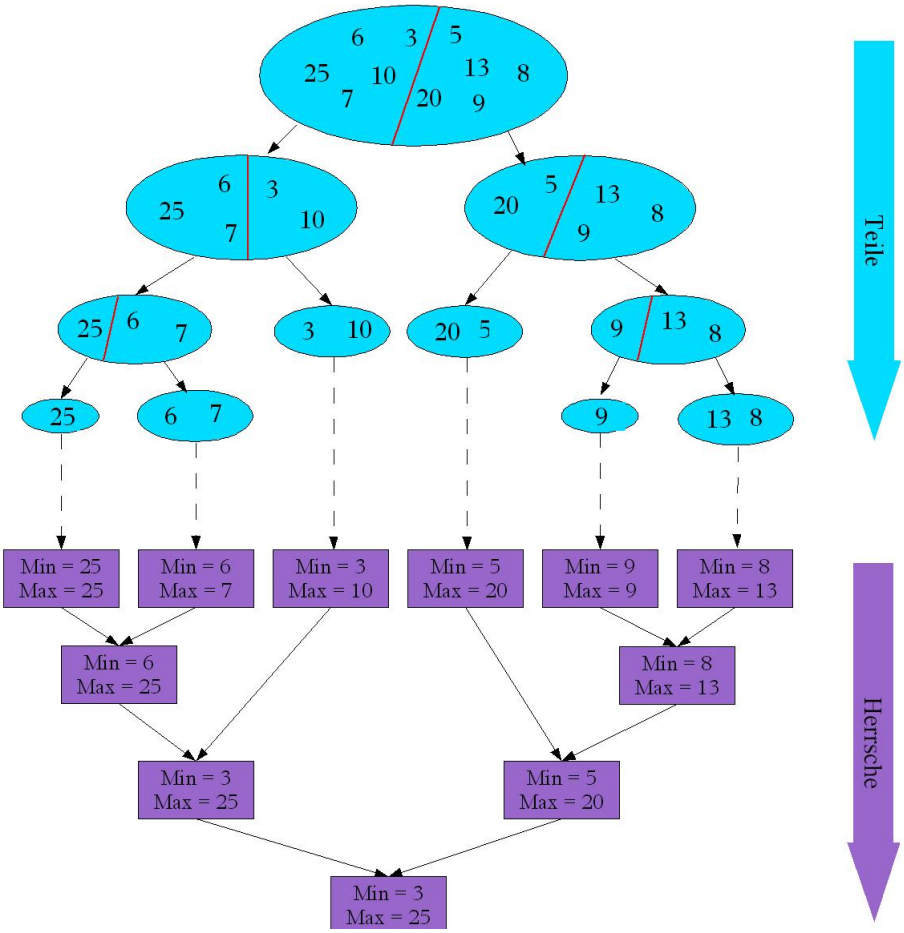


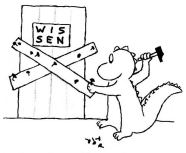
Abbildung 3.1: Minimales und Maximales Element für 10 Zahlen

In Pseudocode haben Teile-und-Herrsche Algorithmen die folgende Form:

Lösung *teile_und_herrsche*(Problem){

- falls das Problem genügend klein ist, löse es und gib die Lösung zurück
- teile das Problem in Teilprobleme auf
- berechne für jedes Teilproblem die entsprechende Teillösung (Teillösung = *teile_und_herrsche*(Teilproblem))
- setze die Teillösungen zu einer Gesamtlösung zusammen
- gib die Gesamtlösung zurück

}



Wissenssicherung 1

Für diese Aufgabe benötigst du einige Jasskarten der gleichen Farbe: Mische die Karten und führe dann den oben beschriebenen Algorithmus aus. Vergewissere dich, dass du auch wirklich die kleinste und grösste Karte gefunden hast.

Aufgabe 1

Anstatt die Menge immer in 2 Teilmengen zu teilen, sollst du sie jeweils in 4 Teilmengen teilen. Führe den veränderten Algorithmus nochmals mit Jasskarten durch. Zeichne auf, wie der Algorithmus für 10 Zahlen aussehen könnte.

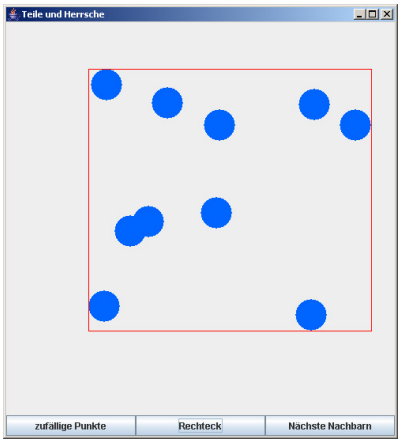
Vergleiche zählen

Aufgabe 2

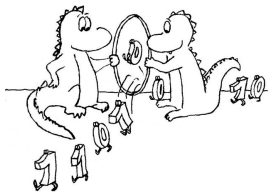
1. Führe den Algorithmus nochmals mit 8 Karten aus und zähle die Vergleiche, die du dazu benötigst!
2. Zähle die Anzahl Vergleiche für 8 Karten, wenn du den obigen, veränderten Teile-und-Herrsche Algorithmus benützt, bei dem eine Menge immer in 4 Teilmengen aufgeteilt wird.
3. Zähle die Anzahl Vergleiche für den folgenden Algorithmus: Setze zuerst min und max auf die erste Karte. Nimm die nächste Karte: Falls sie grösser als max oder kleiner als min ist, ändere min oder max entsprechend auf diese Karte. Wiederhole diesen Schritt, bis alle Karten bearbeitet sind. **Hinweis:** Man braucht 2 Vergleiche, um herauszufinden, ob eine Karte kleiner als min oder grösser als max ist.

Programmieraufgabe 3

Für diese Aufgabe benötigst du die Datei *TeileundHerrsche.jar*. Wenn du das Programm startest, siehst du ein Fenster mit 3 Knöpfen. Wenn du auf "zufällige Punkte" klickst, erscheinen 10 Punkte mit zufälligen Koordinaten. Der Knopf "Rechteck" soll ein Rechteck zeichnen, das alle Punkte enthält. Das ist jedoch noch nicht vollständig implementiert.



Dazu müssen die kleinste sowie die grösste x- und y-Koordinate berechnet werden. Implementiere den Teile-und-Herrsche Algorithmus, den du eben gelernt hast.
Ergänze dazu die Methode *minmax* in *MinMax.java*. Sie soll jeweils das Minimum und das Maximum von zwei Zahlen berechnen.



3.2 Partnerarbeit: Ratespiel

Spielt zwei Runden dieses Spiels. In einer Runde spielt jeder einmal Partner A und einmal Partner B.

Spielreglen:

Partner A merkt sich eine Zahl zwischen 1 und 100. Partner B versucht diese Zahl mit möglichst wenigen Fragen zu erraten. Er darf aber nur Fragen stellen, die die folgende Form haben:

Ist die Zahl grösser als ... ?

Zählt die Anzahl Fragen und tragt sie in die Tabelle ein.

Achtung: Partner B darf keine falschen Zahlen raten, sonst ist das Spiel ungültig! B darf deshalb die Zahl erst sagen, wenn er ganz sicher ist, dass es die richtige ist.

	Name 1:		Name 2:	
Runde	Gesuchte Zahl	Anzahl Fragen	Gesuchte Zahl	Anzahl Fragen
1				
2				
3				
	Total:		Total:	

Für die dritte Runde sollt ihr euch zuerst eine Strategie überlegen. Schreibt eure Strategie auf, so dass euer Partner sie nicht sieht. Natürlich muss die Strategie für alle möglichen Zahlen, die der Partner wählt, funktionieren.

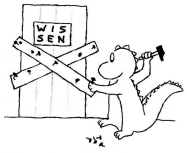
Zählt die Punkte zusammen! Der Verlierer gratuliert dem Gewinner. Keine Angst, es gibt eine Revanche.

Strategie "Rückwärts"

Lest folgendes Beispiel durch und beantwortet die anschliessenden Fragen.

Ein Spieler hat die folgende Strategie:

Seine erste Frage lautet:	Ist die Zahl grösser als 99 ?
Falls der Gegenspieler mit ja antwortet, weiss er, dass dieser sich 100 gemerkt hat und ist fertig. Sonst erniedrigt er um 1:	Ist die Zahl grösser als 98 ?
Falls der Gegenspieler mit ja antwortet, ist er fertig. Sonst erniedrigt er um 1:	Ist die Zahl grösser als 97 ?
Er fährt so weiter, bis entweder die Antwort ja ist oder er bei 1 angelangt ist.	⋮
	Ist die Zahl grösser als 1 ?



Wissenssicherung 2

Ist diese Strategie eine Teile-und-Herrsche Strategie? Falls ihr euch nicht sicher seid, lest nochmals die Theorie im vorherigen Abschnitt! Was ist hier das Problem, welches sind die Teilprobleme und Teillösungen?

Aufgabe 4

Es geht wieder darum, eine Zahl zwischen 1 und 100 zu erraten. Welche Zahl muss der Gegenspieler wählen, damit mit der Rückwärtsstrategie möglichst wenige Fragen gestellt werden müssen und wieviele Fragen sind es? Bei welcher Zahl werden die meisten Fragen gestellt?

Strategie Mitte

Spielt das Spiel nochmals mit der folgenden Strategie: Wähle m immer in der Mitte aller noch in Frage kommenden Zahlen. Frage dann: Ist die Zahl grösser als m?

Aufgabe 5

Wie viele Fragen werden jetzt gestellt? Bei welcher Zahl werden die meisten, bei welcher die wenigsten Fragen gestellt?

Programmieraufgabe 6

Schreibe diese Strategie als Pseudocode auf.

Ratespiel Intervall

Spielt nochmals das Ratespiel mit leicht geänderten Spielregeln: Eine Zahl gilt schon als richtig, wenn sie höchstens um 2 abweicht von der Zahl, die sich der Partner gemerkt hat.

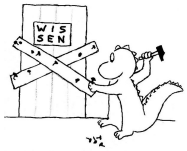
Name 1:		Name 2:	
Gesuchte Zahl	Anzahl Fragen	Gesuchte Zahl	Anzahl Fragen
Total:		Total:	

Aufgabe 7

Wie kann die Strategie Mitte geändert werden, so dass sie gut fürs Ratespiel Intervall eingesetzt werden kann? Schreibe deine Lösung in Pseudocode oder in Java.

3.3 Binäre Suche

Ein ähnliches Problem wie beim Ratespiel stellt sich, wenn ein Objekt in einem sortierten Array gesucht werden muss. Ein Beispiel: Name und Telefonnummer in einem Telefonbuch suchen.

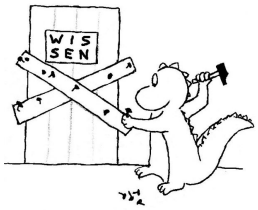


Wissenssicherung 3

Beschreibe mit eigenen Worten, wie du deinen Namen und deine Telefonnummer im Telefonbuch suchst. Natürlich sollst du Teile-und-Herrsche verwenden.

Programmieraufgabe 8

Schreibe einen Teile-und-Herrsche Algorithmus, der dieses Problem löst. Benütze dazu *BinaereSuche.java* und ergänze die Methode *suche*. Teste die Methode mit einem geordneten Array! Was geschieht, wenn ein Wort nicht vorhanden ist?

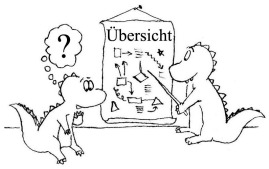


Lernkontrolle

1. Begründe, warum die binäre Suche nicht funktioniert, wenn die Objekte nicht geordnet sind!
2. Schreibe die einzelnen Schritte des MinMax Algorithmus auf für diese Zahlen: 7 6 2 9

Kapitel 4

Sortieren und nächste Nachbarn finden



Übersicht

Worum geht es?

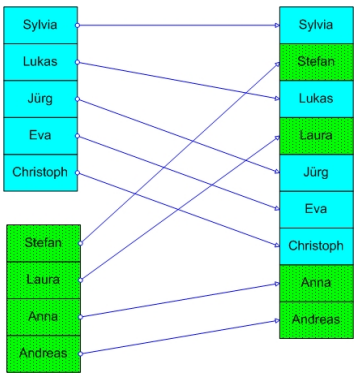
Du wirst nun noch mehr Teile-und-Herrsche Beispiele kennenlernen. Hast du dich z.B. schon mal gefragt, wie man ein Adressbuch sortiert? Hier erfährst du die Antwort.

Lernziele

Du wirst lernen, die Teile-und-Herrsche Methode anzuwenden, um selbst Algorithmen zu erfinden. Du sollst auch die etwas schwierigeren Teile-und-Herrsche Beispiele in diesem Kapitel verstehen.

4.1 MergeSort

Die lernst hier eine Teile-und-Herrsche Methode kennen, um einen ungeordneten Array zu sortieren.
Die Methode beruht darauf, zwei sortierte Arrays einfach und schnell zu einem einzigen, sortierten Array zusammenzufügen:



Aufgabe 1

Du brauchst wieder Jasskarten. Mische sie und lege zwei Reihen von je etwa 5 Jasskarten auf den Tisch. Sortiere jede Reihe einzeln. Jetzt sollst du diese Karten einzeln in eine dritte Reihe verschieben, so, dass diese sortiert ist.

1. Welche Karte kommt als erste in die dritte Reihe?
2. Welche Karten musst du jeweils vergleichen, bevor du eine Karte in die dritte Reihe verschieben kannst?
3. Wie gehst du vor, wenn die erste oder die zweite Reihe leer ist?

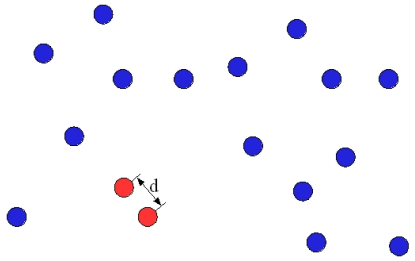
Aufgabe 2

Überlege dir, wie du zwei sortierte Arrays zu einem sortierten Array zusammenfügen kannst. Vervollständige dann die Methode *merge* in *MergeSort.java* und teste sie (z.B. mit *merge(teilsortiert,0,4,8);*)

Aufgabe 3

Wie kann man mit der Teile-und-Herrsche Methode sortieren? Benütze die Methode *merge* der letzten Aufgabe. Überlege dir eine Strategie und vervollständige die Methode *mergeSort*. (teste z.B. mit *sort(unsortiert,0,unsortiert.length -1);*)

4.2 Nächste Nachbarn

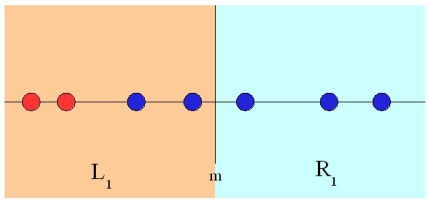


Welche beiden Punkte liegen am nächsten beieinander? Den Abstand für alle möglichen Punktepaare zu vergleichen würde für viele Punkte lange dauern! Zum Glück gibt es eine schnellere Lösung.

In einer Dimension

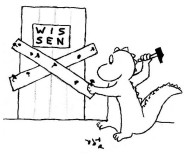
Dasselbe Problem ist in nur einer Dimension Problem einfacher zu lösen: Gesucht sind die zwei Punkte mit kleinstem Abstand auf einer Gerade.

Wir teilen die Punkte auf in zwei Teilmengen L_1 und R_1. Die Aufteilung nehmen wir an einem Punkt m vor. Idealerweise liegt m so, dass auf beiden Seiten möglichst gleich viele Punkte verbleiben.



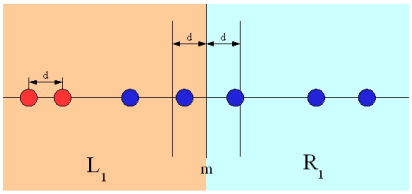
Nehmen wir an, wir hätten das Nächste Nachbarn Problem für L_1 und R_1 schon gelöst. Wir haben also für L_1 die zwei Punkte mit dem kleinsten Abstand gefunden. Dasselbe für R_1. Wie können wir daraus das Problem für die ganze Punktemenge lösen? Wir stehen also vor einem Problem: Das gesuchte Punktepaar könnte auch so liegen, dass ein Punkt in L_1 ist und der andere in R_1. Es gibt also 3 Möglichkeiten für das Punktepaar mit kleinstem Abstand:

1. Es liegt ganz in L_1.
2. Es liegt ganz in R_1.
3. Ein Punkt liegt in L_1 und der andere in R_1



Wissenssicherung 1

Zeichne ein Beispiel zu jedem dieser drei Fälle und vergleiche diese mit einem Mitschüler!



Sagen wir, d_1 sei der kleinste Abstand zweier Punkte in L_1 und d_2 der kleinste Abstand zweier Punkte in R_1. Wir nennen d das Minimum von d_1 und d_2.

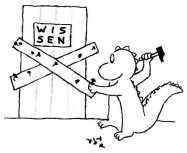
Falls Fall 3 eintrifft, wissen wir, dass die gesuchten Punkte höchstens einen Abstand d zu m haben können.

Aufgabe 4

Warum kann der gesuchte Punkt nicht weiter als d von m entfernt liegen? Kann es sein, dass zwischen m und m+d mehr als ein Punkt liegt?

Der Algorithmus sieht also etwa so aus:

- Falls die Menge nur wenige Elemente hat, dann berechne das Punktepaar mit dem kleinsten Abstand direkt.
- Sonst:
  - Teile:
    - Wähle ein m möglichst in der Mitte
    - Teile die Menge auf in 2 Teilmengen L und R auf, so dass in L alle Elemente kleiner m sind und in R alle grösser oder gleich m.
  - Suche rechts:
    - Suche das Punktepaar mit kleinstem Abstand (dr) in R.
  - Suche links:
    - Suche das Punktepaar mit kleinstem Abstand (dl) in L.
  - Suche in der Mitte:
    - Berechne das Minimum d von dl und dr.
    - Suche alle Punkte, die höchstens Abstand d von m haben. Das sind höchstens 2 Punkte. Berechne ihren Abstand dm.
  - Setze die Lösung zusammen:
    - Berechne das Minimum d von dl, dr und dm und gib das entsprechende Punktepaar zurück.

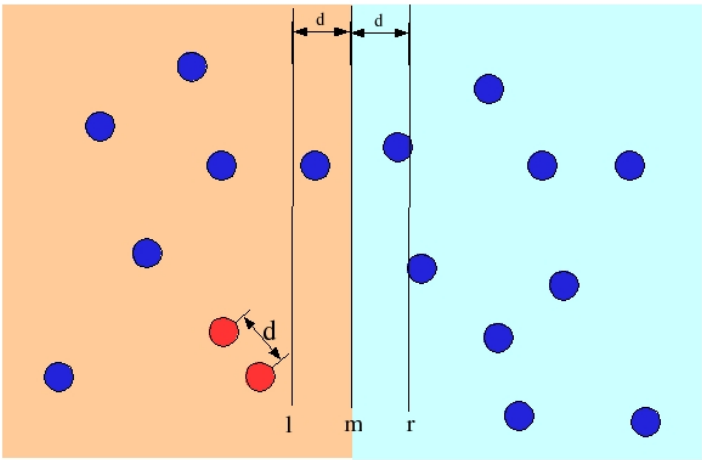


Wissenssicherung 2

Erkläre kurz deinem Nachbarn in eigenen Worten, wie der obige Algorithmus funktioniert.

In zwei Dimensionen

In 2D wird die ganze Sache ein wenig schwieriger, das Prinzip ist indes dasselbe. Wir teilen wieder die Punkte in zwei möglichst gleichgrosse Mengen auf. Sei d wieder das Minimum des kleinsten Abstandes in beiden Teilmengen.



Ein Punkt links von l oder rechts von r kann nicht zum Punktepaar mit dem kleinsten Abstand gehören, weil der Abstand dann grösser als 2d ist.

Aufgabe 5

Wieviele Punkte können jetzt zwischen den Gerade m und Gerade l liegen?

Aufgabe 6

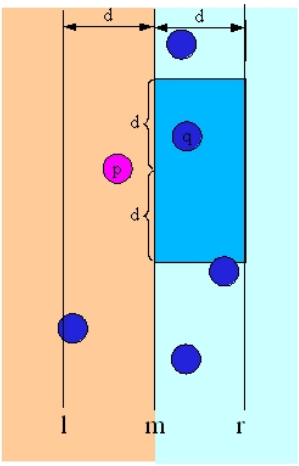
Ändere den Algorithmus für eine Dimension so, dass er für zwei Dimensionen funktioniert. Schreibe deine Lösung als Text oder Pseudocode auf!

Programmieraufgabe 7

Nun sollst du deinen Algorithmus implementieren. Benütze wieder *TeileundHerrsche.jar*. Ergänze dazu die Methode *naechsteNachbarn* in *Kreise.java*

Verbesserung (freiwillig)

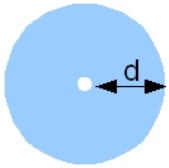
Alle Punkte zwischen l und r zu testen, kann ziemlich aufwändig werden. Wir können aber eine Verbesserung vornehmen.



Wir wollen wissen, ob es ein Paar nächster Nachbarn gibt, bei dem der eine Punkt p in L1 liegt und der andere Punkt q in R1. Wir wissen dann folgendes über q:

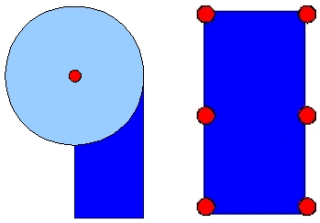
1. q liegt zwischen m und r.
2. Der vertikale Abstand zwischen p und q kann sicher nicht grösser als d sein.

Das heisst: Für den Punkt p müssen wir nur für alle Punkte im blauen Rechteck den Abstand testen.



Im Abstand d von einem Punkt darf kein anderer Punkt sein

In einem Rechteck mit Seitenlängen d und 2d kann es höchstens 6 Punkte geben, die mindestens einen Abstand d voneinander haben:



Versuche so möglichst viele Punkte zu platzieren.

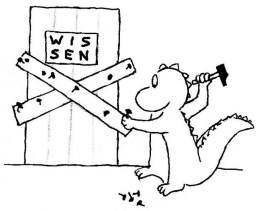
Wir müssen also nur den Abstand zwischen p und seinen 6 Nächsten Nachbarn (zwischen l und m) berechnen.

Der verbesserte Algorithmus sieht also etwa so aus:

- Falls die Menge nur wenige Elemente hat, dann berechne das Punktepaar mit dem kleinsten Abstand direkt.
- Sonst:
  - Teile:
    1. Wähle eine Gerade m, die durch keinen Punkt geht.
    2. Teile die Menge auf in 2 Teilmengen L und R auf, so dass in L alle Elemente links von m sind und in R alle rechts von m.
  - Suche rechts:
    - Suche rekursiv das Punktepaar mit kleinstem Abstand (dl) in L.
  - Suche links:
    - Suche rekursiv das Punktepaar mit kleinstem Abstand (dr) in R.
  - Suche in der Mitte:
    1. Berechne das Minimum d von dl und dr.
    2. Setze l = m-d und r = m + d
    3. Speichere alle Punkte rechts von l und links von m in einem Hilfsarray tmpl.
    4. Speichere alle Punkte rechts von m und links von r in einem Hilfsarray tmpr.
    5. Sortiere tmpl und tmpr bezüglich der y-Koordinate.
    6. Suche die 6 Nachbarn in tmpr für alle Punkte in tmpl und berechne den Abstand. Falls er kleiner ist als der kleinste bisherige, dann merke den Abstand und die Punkte.
    7. Suche die 6 Nachbarn in tmpl für alle Punkte in tmpr und berechne den Abstand. Falls er kleiner ist als der kleinste bisherige, dann merke den Abstand und die Punkte.

Programmieraufgabe 8

Ändere die Methode *naechsteNachbarn* in *Kreise.java* nochmals, so dass der verbesserte Algorithmus implementiert ist.



Lernkontrolle

1. Wie findest du zwei Zahlen in einem Array, die den kleinsten Abstand haben? Du sollst z.B. 2,3 in [2,3,5,10,12,24] finden.

2. Beschreibe, wie die Zahlen 3,7,4,14,7 mit Merge Sort sortiert werden.

Lösungen

Lösungen Kapitel 1

Lösung 1

Ja, der Automat kann auf jeden Betrag Rückgeld herausgeben. Er könnte zum Beispiel den Rückgeldbetrag nur mit Zehnräpplern bezahlen. Der Betrag, den der Kunde bezahlt, ist sicher durch 10 Rappen teilbar, da alle möglichen Münzen die er einwerfen kann durch 10 Rappen teilbar sind. Auch alle Preise sind durch 10 Rappen teilbar. Dann muss auch der Rückgeldbetrag (Betrag-Preis) durch 10 Rappen teilbar sein.

Lösung 2

Das Rückgeld ist $3.00 - 2.30 = 0.70$. Die möglichen Münzkombinationen sind:

	0.50	0.20	0.10
1.	1	1	0
2.	1	0	2
3.	0	3	1
4.	0	2	3
5.	0	1	5
6.	0	0	7

Die erste Möglichkeit ist optimal: Es werden nur 2 Münzen gebraucht.

Lösung 3

Das Rückgeld beträgt 0.90. Die minimale Anzahl Münzen ist 3. (0.50+2*0.20)

Lösung 4

a	b	c	d	e	f
0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	2
0	0	0	0	3	1
0	0	0	0	2	3
0	0	0	0	1	5
0	0	0	0	0	7

Lösung Wissenssicherung 1

Der Automat gibt die Münzen 1.00, 0.50, 0.20 und 0.10 zurück:

1.		$B = 1.80$
2.	M = 1.00	$B = 0.80$
3.	M = 0.50	$B = 0.30$
4.	M = 0.20	$B = 0.10$
5.	M = 0.10	$B = 0.00$

Lösung 5

Eine mögliche Lösung:

```
/*
 * Gibt das Rückgeld auf der  Konsole aus für einen
 * gegebenen Preis und Betrag.
```

```
 */
public static void rueckgeld(int betrag, int nummer){
  if(nummer<Getraenke.length && betrag>Getraenke[nummer]){

    int b = betrag - Getraenke[nummer];
    int m,i;

    System.out.println("Rückgeld: "+ b);
    System.out.print("Münzen: ");

    while(b>0){
      i = 0;
      while(i < Muenzen.length && Muenzen[i]>b){i++;}
      if(i<Muenzen.length){
        m = Muenzen[i];
        b = b-m;
        System.out.print(m + ", ");}
    }
    System.out.println();
  }
}
```

Lösung 6

Der Greedy-Automat gibt 41 und 19*1 aus (20 Münzen). Die optimale Lösung wäre 3*20 (3 Münzen).

Lösung 7

- Betrag 80. Optimal: $80 = 4 * 20$ (4 Münzen). Greedy: $80 = 41 + 20 + 19 * 1$
- Münzen 1,3,4: Greedy funktioniert nicht für den Betrag 6. Optimal: $6 = 3+3$, Greedy: $6 = 4 + 1 + 1$

Lösung 8

Die optimale Lösung für ist für beide Beispiele Gegenstand 2 und 3 (Wert 220).

Ein möglicher Greedy-Algorithmus: Nimm immer den Gegenstand mit dem höchsten Wert, den man nehmen kann, ohne das Maximalgewicht des Rucksacks zu überschreiten.
Beim 1. Beispiel wird der Gegenstand 1 ausgewählt (Wert 200). Das ist nicht optimal. Beim 2. Beispiel werden die Gegenstände 2 und 3 ausgewählt (optimal).

Eine andere Möglichkeit ist: Nimm immer den Gegenstand, der das grösste Verhältnis Wert/Gewicht aufweist.
Beim 1. Beispiel werden 2 und 3 ausgewählt (optimal). Beim 2. Beispiel 1 und 2 (nicht optimal).

Gegenstand	Wert	Gewicht	Wert/Gewicht
1	60	10	6
2	100	20	5
3	120	30	4

Lösung Lernkontrolle

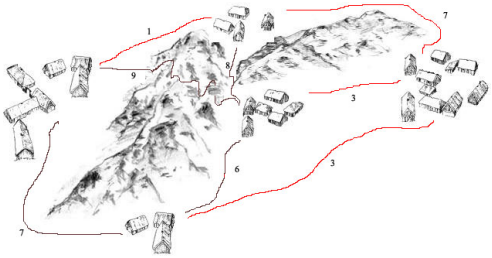
1. Der grösste Wert wird mit 1.5 l Wasser, 0.2 l Schokolade, 2 l Orangensaft und 1.3 l Brot erreicht. Der Wert beträgt $1.5*5+0.2*4+2*3+1.3*2 = 16.9$

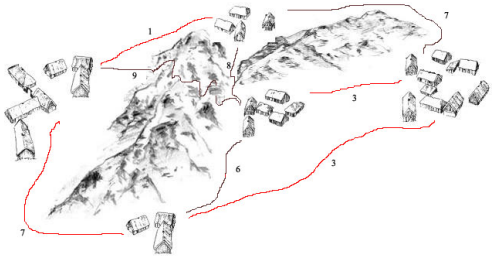
2. Greedy: Nimm immer den (noch vorhandenen) Gegenstand mit dem höchsten Wert pro Volumen und packe so viel davon ein, dass das Volumen des Rucksacks nicht überschritten wird! Der Algorithmus liefert immer den grösstmöglichen Wert, wenn man die Gegenstände beliebig teilen kann.

Lösungen Kapitel 2

Lösung 1

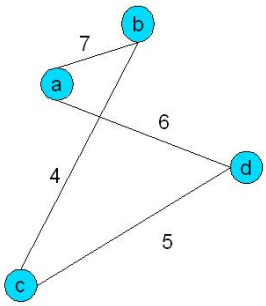
Es gibt 2 Lösungen mit denselben Kosten: (3+3+7+1=14)

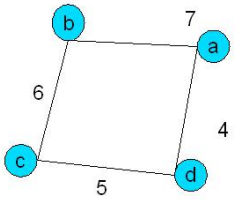




Lösung Wissenssicherung 1

Es spielt keine Rolle, wo die Knoten gezeichnet sind und ob die Kanten sich schneiden. Zwei mögliche Lösungen sind:





Lösung Wissenssicherung 2

Die Menge der ausgewählten Kanten ist für die Lösung 1:

$$(A, C), (B, E), (C, E), (D, E)$$

Für die Lösung 2:

$$(A, B), (A, C), (B, E), (D, E)$$

Lösung 2

Ergibt sich ein Zyklus, kann man eine Kante weglassen. Am besten diejenige mit dem grössten Gewicht. Es werden dann immer noch alle Knoten besucht.

Lösung Wissenssicherung 3

In den Bildern 1-3 sind Bäume dargestellt.

Lösung Wissenssicherung 4

1 und 3 sind Spannbäume. 1 ist minimal.

Lösung 3

Gegeben ist ein gewichteter Graph mit Knotenmenge V, Kantenmenge E und Gewichtsfunktion g: $E \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist ein minimaler Spannbaum. Die Knoten des minimalen Spannbaums sind genau die Knoten des Graphen V. Die Kanten-

menge des Spannbaums müssen wir noch herausfinden. Wir bezeichnen sie mit E_S.

> Setze anfangs $E_S = \{\}$.
> Für alle Kanten:
> Wähle diejenige mit dem kleinsten Gewicht, die keinen Kreis schliesst.

Wie lässt sich eruieren, ob ein Kreis entsteht, wenn man eine Kante hinzufügt? Eine effiziente Möglichkeit ist die folgende:

> Wir speichern eine Menge von Bäumen B. Anfangs enthält B alle Knoten einzeln. Setze anfangs $E_S = \{\}$. Sortiere E aufsteigend nach dem Gewicht.
>
> Setze für alle Kanten e=(u,v) in E (in aufsteigender Reihenfolge):
>
> - Falls sich u und v nicht in demselben Baum in B befinden, dann nimm die Kante:
> - Vereinige den Baum mit Knoten u und den Baum mit Knoten v zu einem einzigen Baum.
> - Füge die Kante e zu E_S hinzu

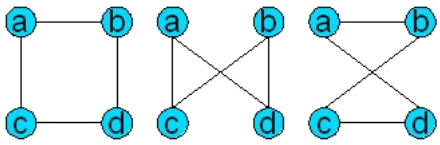
Lösung 5

Es gibt verschiedene Möglichkeiten. Eine Möglichkeit ist: Nimm immer die kürzeste Kante, die keinen Kreis schliesst, bis alle Knoten verbunden sind.

Du kannst den Algorithmus auf "Greedy-Heuristics" stellen und ihn dann Schritt für Schritt ausführen. Klicke auf "Description" und "Pseudocode" für mehr Information.

Ein Beispiel, bei dem dieser Algorithmus nicht funktioniert, findest du, wenn du beim Menu Examples auf Euclidian-Worst-Case klickst.

Lösung 6



Allgemein gibt es für einen Graphen mit n Knoten:

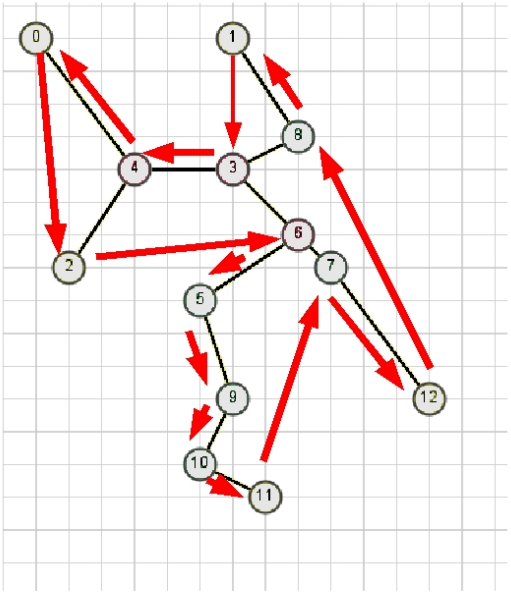
$$(n-1)!/2$$

Rundreisen.
Vom Startknoten gibt es n-1 Möglichkeiten für den zweiten Knoten. Dann gibt es nur noch n-2 Möglichkeiten für den 3. Knoten... Jeder Knoten darf nur einmal besucht werden. Das sind $(n-1)!$. Da es uns egal ist, in welche Richtung die Rundreise geht, gibt es nur noch halb so viele Möglichkeiten.

Knoten:	3	4	5	10	100
Rundreisen:	1	3	12	181440	4.6663e+155

Lösung 7

Es gibt mehrere Lösungen. Eine ist hier abgebildet:



Lösung 8

Eine mögliche Lösung: Speichere alle Kanten doppelt in einem Array E für beide Richtungen z.B.(a,b) und (b,a).

Starte mit einem beliebigen Knoten c. Wiederhole, bis alle Kanten markiert sind:

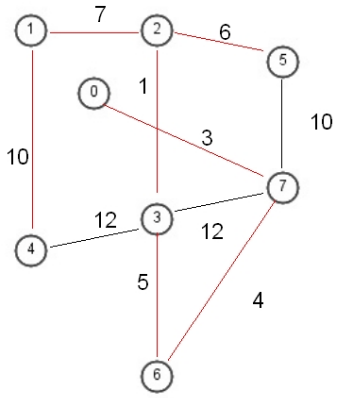
- Suche eine unmarkierte Kante e in E mit Knoten c als ersten Knoten.
- Füge c zur Lösung hinzu und markiere die Kante e.
- Setze c auf den zweiten Knoten von e.

Lösung 9

Wenn man der optimalen TSP Lösung eine Kante entfernt, ergibt sich ein Spannbaum. (siehe Hinweis) Wäre dieser kleiner als der minimale Spannbaum, dann wäre er nicht minimal! Also muss $OPTTour - irgendeineKante \geq MST$ gelten.

Lösung Lernkontrolle

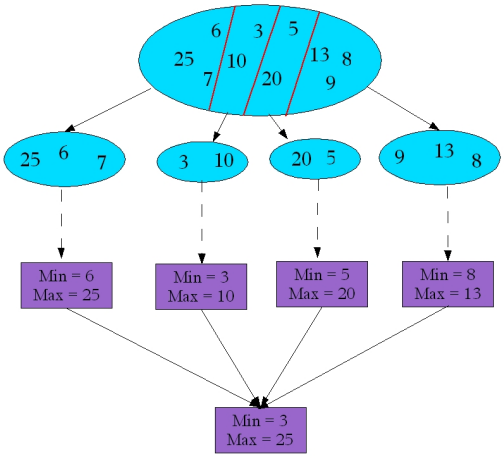
Die Lösung des minimalen Spannbaums eignet sich nicht, um TSP zu approximieren!



Eine Approximation mit dem minimalen Spannbaum aus der Lösung oben eignet sich nicht für diese TSP Lösung. Der minimale Spannbaum wurde für einen Graphen gemacht, bei dem die Gewichte nicht den Abständen entsprechen. Die Tour ist optimal für die Abstände im Graphen und nicht für Gewichte. Einige Kanten (die in der optimalen Tour vorhanden sind) existieren nicht im ursprünglichen Graphen.

Lösungen Kapitel 3

Lösung 1



Lösung 2

1. 7 Vergleiche
2. 10 Vergleiche
3. 14 Vergleiche im schlimmsten Fall

Lösung 3

```
/*
 * Berechnet das Minimum und das Maximum im Array daten im Bereich
 * zwischen anfang und ende
 */
public int[] minmax(int anfang, int ende){
  int res[] = new int[2];

  if((ende-anfang)<=1){
    res[0] = minimum2(daten[anfang],daten[ende]);
    res[1] = maximum2(daten[anfang],daten[ende]);
  }
  else if((ende-anfang)>1){

    int [] t1 = new int[2];
    int [] t2 = new int[2];

    t1 = minmax(anfang,anfang+(ende-anfang)/2);
    t2 = minmax(anfang+(ende-anfang)/2+1,ende);

    res[0] = minimum2(t1[0],t2[0]);
    res[1] = maximum2(t1[1],t2[1]);
  }
  return res;
}
```

Lösung Wissenssicherung 2

Ja, es ist eine Teile-und-Herrsche Strategie. Die Frage "Ist die Zahl grösser als n?" teilt das Problem in zwei Teilprobleme:

1. Zahlen suchen, die grösser sind als n
2. Zahlen suchen, die kleiner oder gleich n sind

Das besondere hier ist, dass bei jeder Antwort nur noch das eine Teilproblem betrachtet werden muss. Ist die Antwort nein, dann muss man nur noch Fall 2

betrachten. (Bei ja Fall 1). Die Teillösung ist die gesuchte Zahl. Diese ist auch gleich der Gesamtlösung.

Lösung 4

Bei 100 braucht es nur eine Frage ("Ist die Zahl grösser als 99?"). Bei 1 braucht es 99 Fragen.

Lösung 5

Es werden immer etwa gleich viele Fragen gestellt. (7 oder 8) Es sind nicht immer genau gleich viele, weil die Mitte nicht immer eindeutig ist.

Lösung 6

Listing 4.1: Strategie Mitte

```
/*
 * c: gesuchte Zahl, max > min, c zwischen min und max
 */
public static int suche(int min,int max){
  //Abbrechen falls nur noch 1 Element
  if(max - min == 0){
    return min;
  }
//  wähle m: Mitte zwischen min und max
  int m = (max + min)/2;

//   Ist die gesuchte Zahl grösser als m?
  if(c > m) return suche(m + 1,max);
  else return suche(min,m);
}
```

Lösung 7

Listing 4.2: Intervall

```
/*
 * c: gesuchte Zahl, max > min
 */
public static int suche2(int min,int max, int abstand){
  if(max-min <= abstand){
    return min;
  }
//  wähle m: Mitte zwischen min und max
  int m = (max+min)/2;

//  Ist die gesuchte Zahl grösser als m?
  if(c>m) return suche(m+1,max);
  else return suche(min,m);
}
```

Lösung Wissenssicherung 3

Schlage das Buch in der Mitte auf. Kommt dein Name im Alphabet später, dann suche zwischen Mitte und Ende des Buches. Sonnst zwischen Anfang und Mitte. Suche jetzt wieder gleich wie vorher: In der Mitte aufschlagen, ...

Lösung 8

Listing 4.3: Variante 1 - iterativ

```
private static void suche(String[] daten,String s,int links,int rechts){
  while(links <=rechts){
    //Mitte abgerundet
    int m = (links+rechts)/2;

    if(s.equals(daten[m])){
      System.out.println(s + " gefunden");
```

```
      return;
    }
    if(s.compareTo(daten[m])<0){
      rechts = m-1;
    }
    else if(s.compareTo(daten[m])>0){
      links = m+1;
    }
  }
  System.out.println(s + " nicht gefunden");
}
```

Listing 4.4: Variante 2 - rekursiv

```
private static void suche2(String[] daten,String s,int links,int rechts){
  if(rechts < links){
    System.out.println(s + " nicht gefunden");
    return;
  }
  //Mitte abgerundet
  int m = (links+rechts)/2;

  if(s.equals(daten[m])){
    System.out.println(s + " gefunden");
    return;
  }

  if(s.compareTo(daten[m])<0){
    suche2(daten,s,links,m-1);
  }

  else if(s.compareTo(daten[m])>0){
    suche(daten,s,m+1,rechts);
  }
}
```

Lösung Lernkontrolle

1. Bei der binären Suche teilt man die Daten in der Mitte und sucht nur in der einen Hälfte weiter. Sind die Objekte aber nicht geordnet, weiss man nicht, in welcher Hälfte sich das gesuchte Objekt befindet.

2. MinMax für 7 6 2 9 :

   - Berechne MinMax für $M = \{7, 6, 2, 9\}$
   - Teile in zwei Teilmengen $M_L = \{7, 6\}$, $M_R = \{2, 9\}$
   - Berechne MinMax für M_L
     - Teile M_L in zwei Teilmengen $\{7\}$, $\{6\}$
     - Berechne das Minimum und das Maximum: $min = 6$,$max = 7$
   - Berechne MinMax für M_R.
     - Teile M_R in zwei Teilmengen $\{2\}$, $\{9\}$
     - Berechne das Minimum und das Maximum: $min = 2$,$max = 9$
   - Setze die Lösungen zusammen: $min = 6$, $max = 9$

Lösungen Kapitel 4

Lösung 1

1. Die kleinere der beiden ersten Karten der Reihen 1 und 2.
2. Immer die vordersten Karten der Reihen 1 und 2.
3. Wenn die erste Reihe leer ist, kommen die Karten der 2. Reihe nacheinander in die 3. Reihe. Es braucht keine Vergleiche mehr. (Für die 2. Reihe dasselbe umgekehrt.)

Lösung 2

```
/**
 * Voraussetzung:
 * daten[] ist aufsteigend sortiert von links bis mitte-1 und
 * daten[] ist aufsteigend sortiert von mitte bis rechts
 *
 * Die Elemente von daten[] werden nun so in den Hilfsarray tmp eingefügt,
 * dass tmp[] aufsteigend sortiert ist.
 *
 * Am Schluss werden die Elemente von tmp[] wieder in daten[] gespeichert.
 *
 */
public static void merge(String[] daten, int links, int mitte, int rechts){
  int anzahlDaten = rechts - links +1;
```

```
  int l = links;
  int m = mitte;
  int k = 0;

  String[] tmp = new String[anzahlDaten];

  while((l < mitte) && (m <= rechts)){
    if(daten[l].compareTo(daten[m]) <= 0){
      tmp[k] = daten[l];
      l++; k++;
    }
    else{
      tmp[k] = daten[m];
      m++; k++;
    }
  }

  while(l < mitte){
    tmp[k] = daten[l];
    l++; k++;
  }

  while(m <= rechts){
    tmp[k] = daten[m];
    m++; k++;
  }
  for (int i = 0; i < anzahlDaten; i++)
    daten[links + i] = tmp[i];

}
```

Lösung 3

```
/**
 * Sortiere einen Array daten[] von links bis rechts mit Merge-Sort
 */
static void sort(String daten[], int links, int rechts)
{
  int anzahlDaten = rechts-links +1;
  int mitte = links + anzahlDaten/2;

  if (anzahlDaten == 0) return; //keine Daten
  if (anzahlDaten == 1) return; //ein Element ist schon sortiert ;)

  sort(daten, links, mitte -1);
```

```
  sort(daten, mitte, rechts);
  merge(daten, links, mitte, rechts);
}
```

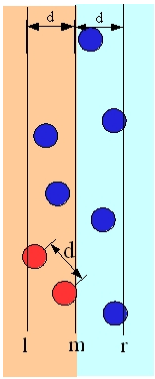
Lösung 4

1. Ist die Entfernung eines Punktes p zu m grösser als d, sind alle Nachbarn auf der anderen Seite von m weiter als d von ihm entfernt. Wir suchen aber nur die nächsten Nachbarn, bei denen ein Punkt p auf der einen Seite liegt und der andere (q) auf der anderen. Wenn p und q also einen Abstand grösser als d haben, dann können sie nicht die nächsten Nachbarn sein. Denn es gibt ein näheres Punktepaar mit Abstand d.

2. Wenn es zwischen m und d+m zwei Punkte hätte, dann hätten diese zwei Punkte einen kleineren Abstand als d. Sie liegen beide auf derselben Seite. d ist aber der kleinste Abstand zweier Punkte auf einer Seite. Das ist ein Widerspruch.

Lösung 5

Alle Punkte können zwischen l und r liegen:



Lösung 6

- Besitzt die Menge nur wenige Elemente, dann berechne das Punktepaar mit dem kleinsten Abstand direkt.
- Sonst:
  - Teile:
    - Wähle ein m möglichst in der Mitte
    - Teile die Menge auf in 2 Teilmengen L und R auf, so dass in L die x-Koordinaten aller Elemente kleiner m sind und in R alle grösser m.
  - Suche rechts:
    - Suche das Punktepaar mit kleinstem Abstand (dr) in R.
  - Suche links:
    - Suche das Punktepaar mit kleinstem Abstand (dl) in L.
  - Suche in der Mitte:
    - Berechne das Minimum d von dl und dr.
    - Suche alle Punkte, die höchstens Abstand d von m haben (in x-Richtung). Berechne ihren Abstand dm.
  - Setze die Lösung zusammen:
    - Berechne das Minimum d von dl, dr und dm und gib das entsprechende Punktepaar zurück.

Lösung 7 + 8

```
/**
 * Berechnet diejenigen 2 Kreise zwischen links und rechts,
 * die den kleinsten Abstand haben.
 * Es wird Teile-und-Herrsche benützt.
 * Die Kreise sind im Array k gespeichert.
 */
```

```
private Kreis [] naechsteNachbarn(int links,int rechts){
  //2 Punkte
  Kreis [] res = new Kreis[2];
  if((rechts-links) == 1){
    res[0]=k[rechts];
    res[1]=k[links];
  }
  //3 Punkte
  else if ((rechts-links) == 2){
    int d1,d2,d3;
    d1 = abstand2(k[rechts],k[links]);
    d2 = abstand2(k[rechts],k[links+1]);
    d3 = abstand2(k[links+1],k[links]);

    if ((d1 < d2) && (d1 < d3)){
      res[0]= k[rechts];
      res[1]= k[links];
    }
    else if(d2<d3 && d2<d1){
      res[0]= k[rechts];
      res[1]= k[links+1];
    }
    else{
      res[0]= k[links+1];
      res[1]= k[links];
    }
  }
  // mehr als 3 Punkte
  else{
    //Punktemenge in der Mitte teilen
    int mitte = (rechts+links)/2;
    int xMedian = k[mitte].getPosX();

    res[0]= k[rechts];
    res[1]= k[links];

    Kreis [] l = new Kreis[2];
    Kreis [] r = new Kreis[2];

    //nächste Nachbarn der linken und der rechten Teilmenge berechnen
    l = naechsteNachbarn(links, mitte);
    r = naechsteNachbarn(mitte+1,rechts);

    int dl = abstand2(l[0],l[1]);
    int dr = abstand2(r[0],r[1]);
    int d;

    //die näheren Nachbarn in res speichern
    if(dl<dr){res = l; d = dl;}
    else{res = r; d = dr;}
```

```
/*
 * Gibt es ein kleineres Punktepaar, bei dem einer in der linken Teilmenge und
 * einer in der rechten Teilmenge liegt?
 */
/*
 * Alle Punkte, die weiter als d von der Mitte entfernt sind wegwerfen,
 * die anderen in tmpl bzw. tmpr speichern
 */
    int j = 0;
    int tmpllength = 0;
    int i = links;
    while(i <= mitte && k[i].getPosX() < (xMedian-d)){i++;}
    while(i<=mitte){
      tmpl[j] = k[i];
      i++; j++;
      tmpllength++;
    }

    j = 0;
    i = mitte+1;
    int tmprlength = 0;
    while(i<rechts && k[i].getPosX() < (xMedian+d)){
      tmpr[j]=k[i];
      i++; j++;
      tmprlength++;
    }

    //tmpr und tmpl nach y sortieren
    Comparator<Kreis> cY = new KreisYComp();
    Arrays.sort(tmpl,0,tmpllength,cY);
    Arrays.sort(tmpr,0,tmprlength,cY);

/*
 * Für jeden Punkt in tmp: Distanz zu 6 Nachbarn messen und schauen,
 * ob sie kleiner ist als die kleinste bisherige Distanz.
 */
    int dm;
    for(i=0;i<tmpllength;i++){
      for(j=0;j<tmprlength;j++){
        dm = abstand2(tmpl[i],tmpr[j]);
        if(dm < d){
          d = dm;
          res[0]=tmpl[i];
          res[1]=tmpr[j];
        }
      }
    }
  }
  //nächste Nachbarn zurückgeben
  return res;
}
```

Lösung Lernkontrolle

1. Das entspricht dem Problem der nächsten Nachbarn in 1D. Die Zahlen entsprechen den x-Koordinaten. Siehe Abschnitt 4.2.

2. (a) Teile 3,7,4,14,7 in 3,7,4 und 14,7.
   (b) Teile 3,7,4 in 3,7 und 4.
   (c) Sortiere 3,7 und 4 und setze die Lösung zusammen (merge): 3,4,7
   (d) Sortiere 14,7: 7,14
   (e) Setze 3,4,7 und 7,14 zusammen: 3,4,7,7,14

Tests

Test: Teil I

1. Beschreibe kurz mit eigenen Worten das Greedy Prinzip. (K2)

2. Ein fauler Kunde möchte bei einem Geränkeautomaten ein Getränk kaufen. Dieser Automat gibt leider kein Rückgeld. Der Kunde möchte möglichst wenige Münzen einwerfen. Wie geht er am besten vor? (K1)

3. Entwerfe einen Greedy Algorithmus für folgendes Problem: Ein Wanderer möchte Gegenstände in seinen Rucksack packen. Jeder Gegenstand hat für ihn einen bestimmten Wert. Der Rucksack hat ein Volumen V und kann höchstens ein Gewicht M tragen. (K3)

4. Eine Gruppe von Inseln soll mit Brücken verbunden werden. Wie gehst du vor, wenn die Kosten für den Bau der Brücken möglichst klein sein sollen? (Je länger eine Brücke ist, desto mehr kostet sie!) (K3)

5. Eine Reiseagentur plant Rundreisen mit einem Schiff für Touristen. Die Reise soll nicht zu lange dauern. Trotzdem ist genau ein Halt auf jeder Insel vorgesehen. Wie soll die Reiseagentur ihr Problem lösen? (K3)

6. Entwerfe einen Greedy Algorithmus für das folgende Problem: Mehrere Kunden möchten bedient werden. Jeder Kunde braucht eine gewisse Bedienungszeit. Wähle eine Reihenfolge der Kunden so, dass die totale Wartezeit möglichst klein ist. Z.B.

   - Kunde A 5min
   - Kunde B 12min
   - Kunde C 3min
   - Kunde D 18min

   Wenn die Kunden in der Reihenfolge D,A,B,C bedient werden, dann ist die totale Wartezeit $0 + 18 + 23 + 35 = 76$ (Wartezeit von D + Wartezeit von A + Wartezeit von B + Wartezeit von C) (K3)

Test: Teil II

1. Beschreibe mit eigenen Worten das Prinzip Teile-und-Herrsche! (K2)
2. Schreibe eine Teile-und-Herrsche Methode *min*, die das Minimum in einem unsortierten Array findet. (K3) *int min(int array[], int links, int rechts)*
3. Ein Patient liegt mit Schmerzen im Krankenhaus und kann im Moment nicht sprechen. Er versteht aber alles und ist in der Lage zu nicken und den Kopf zu schütteln. Du möchtest herausfinden, wo genau er Schmerzen hat. Welche Fragen kannst du ihm stellen, um dies mit binärer Suche herauszufinden? (K3)
4. Beschreibe mit wenigen, eigenen Worten den Algorithmus "Merge Sort". (K2)

Lösungen der Tests

Test: Teil 1: Lösung

1. Siehe Kapitel 1.2.

2. Das ist dasselbe Problem wie das Rückgeldproblem:

   - $B = B_0$, (noch keine Münzen eingeworfen)
   - wiederhole:
     - Falls $B = 0$, dann ist er fertig.
     - Sonst wirf die Münze M ein, die kleiner ist als B und setze $B = B - M$

   Damit diese Lösung funktioniert, muss der Kunde selbstverständlich von jeder Münzart genügend haben.

3. Es gibt mehrere Möglichkeiten. Die einfachste ist, immer den wertvollsten Gegenstand einzupacken, der weder das Maximalgewicht noch das Volumen des Rucksacks überschreitet. Man kann sich auch folgendes überlegen: Der Wert pro Gewicht und der Wert pro Volumen soll möglichst hoch sein. Also könnte man immer den Gegenstand nehmen, für welchen Wert/Gewicht + Wert/Volumen am grössten ist.

4. Suche den minimalen Spannbaum für einen Graphen mit den Inseln als Knoten und allen möglichen Verbindungen als Kanten. (Es ist möglich von jeder Insel zu jeder anderen eine Brücke zu bauen.) Die Kanten des minimalen Spannbaums sind dann die gesuchten Brücken. Den minimalen Spannbaum berechnet man am besten mit dem Algorithmus von Kruskal.

5. TSP muss gelöst werden. Z.B. indem man alle Rundreisen berechnet und die Kleinste auswählt. Vielleicht genügt auch eine Greedy Approximation.

6. Wähle immer denjenigen Kunden, der noch nicht an der Reihe war und der die kürzeste Bearbeitungsdauer hat.

Test: Teil II: Lösung

1. Siehe Kapitel 3.1

2.
```
int min (int array[], int links, int rechts) {
  if (links == rechts)
    return array[links];
  else {
    int mitte = (links + rechts) / 2;
    int min_l = min(array, links, mitte);
    int min_r = min(array, mitte+1, rechts);

    if (min_l < min_r) return min_l;
    else return min_r;

    }
}
```

3. Zum Beispiel: Tut es dir auf der linken Seite weh? Höher als der Bauch?

4. MergeSort:

   - Falls der Array genügend klein ist, sortiere ihn direkt.
   - Sonst:
     - Teile den Array in zwei Teile
     - Sortiere beide Teile rekursiv
     - Füge die beiden Teile so zusammen, dass ein sortierter Array entsteht