Konzeption der Unterrichtsunterlagen

Im ersten Abschnitt dieser Unterrichtsunterlagen wird der hier verwendete Zugang zum Knotenüberdeckungsproblem inhaltlich zusammengefasst und didaktisch begründet.

1 Sachanalyse

Wir beginnen mit der Diskussion der Zielgruppe. Anschliessend werden die zu vermittelnden Begriffe erklärt und in einen fachdidaktischen Rahmen eingeordnet.

1.1 Einführung und Bedeutung im Unterricht

Die vorliegenden Unterrichtsunterlagen untersuchen das **Knotenüberdeckungsproblem** von zwei Aspekten aus: als **Entscheidungsproblem** und als **Optimierungsproblem**. Bei der Formulierung von Berechnungsproblemen und deren Einordnung in Komplexitätsklassen sind diese beiden Begriffe der theoretischen Informatik von wichtiger Bedeutung. Die Behandlung dieses Themengebiets im Unterricht schult die überfachliche Kompetenz des algorithmischen Denkens. Durch das anschauliche Beispiel der Knotenüberdeckung werden die Formalismen den Schülerinnen und Schülern leichter zugänglich gemacht, während sie an das Begriffsfeld herangeführt werden.

Für die Behandlung des Themenkomplexes „Entscheidungsprobleme und Optimierungsprobleme“ im Informatikunterricht des Gymnasiums ist eine gewisse Abstraktionsfähigkeit nötig, wie sie Schülerinnen und Schüler des mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweiges in der 11./12./13. Klassenstufe erlangt haben sollten. Die Zielgruppe dieser Ausarbeitung ist eine solche Klasse im Ergänzungsfach Informatik, die eine solide Grundausbildung in Informatik besitzt, siehe dazu den Abschnitt 1.2 „Nötiges Vorwissen“.

In den vorliegenden Unterlagen wird der Begriff der Knotenüberdeckung ausführlich motiviert, anschliessend formal eingeführt und als Entscheidungsproblem untersucht. Es sind viele Übungsaufgaben in die Stoffvermittlung eingearbeitet. Weiterhin wird die erschöpfende Suche zur exakten Lösung dieses Entscheidungsproblems in Pseudocode präsentiert. Auf das eng verwandte Optimierungsproblem der Knotenüberdeckung wird in einem Ausblick hingewiesen. Für die Behandlung im Unterricht sind etwa drei Lektionen vorgesehen. Die Schülerinnen und Schüler können sich den Stoff mit den vorliegenden Unterlagen dabei selbständig in ihrem eigenen Tempo aneignen. Eine kurze Zusammenfassung für die Lehrperson findet sich im Abschnitt 1.3 „Zentrale Begriffe“.

Insgesamt bildet das vorliegende Material die Grundlage für eine Vielzahl darauf aufbauender Themen der (theoretischen) Informatik und einen Einstieg in die **Komplexitätstheorie**, die historisch wichtig für die Entwicklung der Informatik ist. Auf die Begrifflichkeiten der Komplexitätsklassen wird in den vorliegenden Unterlagen noch nicht eingegangen. Zur möglichen anschliessenden Behandlung ausgewählter Komplexitätsklassen können beispielsweise Bezüge zu anderen **Graphproblemen** hergestellt und den Schülerinnen und Schülern anhand dieser Zusammenhänge weitere Begriffe der Komplexitätstheorie greifbar gemacht werden. Der Grad der Formalisierung dieses Nachfolgethemas ist von den Interessen und weiterem Vorwissen der Schülerinnen und Schüler abhängig. Die Behandlung kann (insbesondere wenn bisher keine Turingmaschinen behandelt wurden) auch als Exkurs mit nur wenigen formalen Details erfolgen. Im Abschnitt 1.4 „Anknüpfungspunkte, Spezialfälle und verwandte Probleme“ wird näher auf mögliche Folgethemen eingegangen.

1.2 Nötiges Vorwissen

Für die Vermittlung des neues Stoffes sollen die grundlegenden Begriffe der **Graphentheorie** bekannt und anwendungsbereit sein. Insbesondere kennen die Schülerinnen und Schüler **Knoten** und **Kanten** in **ungerichteten einfachen Graphen** und deren mathematische Formalisierung. Einfach bedeutet, dass keine **Schlingen** oder **Mehrfachkanten** im Graphen existieren. Kanten werden formal als Paarung und anschaulich als Verbindung ihrer beiden Endknoten angesehen. Die Schülerinnen und Schüler haben bereits einzelne **effizient lösbare** Optimierungsprobleme der Graphentheorie mit entsprechenden **Algorithmen** kennengelernt, insbesondere **minimale Spannbäume**. Gegebenenfalls wurden auch bereits einfache Entscheidungsprobleme behandelt, beispielsweise das **Eulerkreisproblem** oder das **Hamiltonkreisproblem**. Bei der Behandlung dieser Probleme wurde jedoch bisher keine Kategorisierung unter die Oberbegriffe „Optimierungsproblem“ oder „Entscheidungsproblem“ vorgenommen. Der Begriff der **Eingabegrösse** wurde in Bezug auf Zahlen und Graphen behandelt und verstanden. Neben dem Vorwissen im Bereich der Graphentheorie wird ein grundlegendes Verständnis von **Pseudocode** vorausgesetzt, wie man es von der Zielgruppe erwarten kann. Die behandelten Algorithmen der Graphentheorie wurden auch in Pseudocode behandelt und es fällt den Schülerinnen und Schülern nicht schwer, diesen zu verstehen oder zu erstellen. Die Schülerinnen und Schüler haben bereits **Komplexitätsbetrachtungen** an Pseudocode-Algorithmen vorgenommen und wissen, dass Algorithmen mit einer polynomiellen Anzahl an **Rechenschritten** „**effizient**“ genannt werden. Die Zielgruppe ist mit einer **höheren Programmiersprache** (z. B. Pascal, Java oder Python) vertraut. Für die vorliegenden Unterlagen ist es jedoch nicht relevant, um welche Programmiersprache es sich handelt.

1.3 Zentrale Begriffe

In diesem Abschnitt werden die zu vermittelnden Begriffe zusammengefasst und für die Lehrperson erläutert. Zuerst werden Konzepte der Theoretischen Informatik im Allgemeinen ausgeführt, daraufhin am speziellen Problem der Knotenüberdeckung erklärt.

Konzepte der Theoretischen Informatik Probleme der Theoretischen Informatik werden unterschieden in **Entscheidungsprobleme** und **Optimierungsprobleme** und ihre zugehörigen **Suchprobleme** [7]. Unabhängig von der Problemart sind nur bestimmte **Eingaben** erlaubt, die sogenannten **zulässigen (Eingabe-)Instanzen**. Eine solche Eingabe kann z. B. ein Graph sein, eine Zahl oder auch ein Wort der deutschen Sprache. Die Eingaben werden als **Wörter** über einem **endlichen Alphabet** formalisiert [9].

Bei **Entscheidungsproblemen** soll eine bestimmte Eigenschaft der (zulässigen) Eingabeinstanz überprüft werden, dementsprechend ist die Antwort auf ein Entscheidungsproblem „Ja“ oder „Nein“. Häufig geht es darum zu entscheiden, ob die Eingabeinstanz eine bestimmte Struktur (ein Teilwort) besitzt. Ist die Struktur vorhanden, spricht man von **„Ja“-Instanz**, sonst von **„Nein“-Instanz**. Das zugehörige **Suchproblem** ist eine Erweiterung des Entscheidungsproblems, das in „Ja“-Instanzen und „Nein“-Instanzen unterscheidet und für „Ja“-Instanzen zusätzlich ein Teilwort mit der gewünschten Struktur, eine sogenannte **(gültige) Lösung**, zurückliefert.

Bei **Optimierungsproblemen** soll zur Eingabeinstanz die Länge eines Teilwort mit einer bestimmten Struktur gefunden werden, das in einer definierten Weise extrem ist. Üblicherweise kann es sich hier um ein besonders langes, oder ein besonders kurzes Teilwort mit der gewünschten Struktur handeln. Dann spricht man von einem **Maximierungsproblem**, bzw. von einem **Minimierungsproblem**. Die Antwort auf das Optimierungsproblem ist

dann eine Zahl, der **Optimalwert**. Ein Suchproblem für ein Optimierungsproblem liefert zum Optimalwert auch eine **optimale Lösung** dazu: ein Teilwort mit der gewünschten Struktur, das den Optimalwert erreicht.

Häufig kann ein Optimierungsproblem auf ein verwandtes Entscheidungsproblem **reduziert** werden. Dazu wird je nach Beschaffenheit des Problems durch **erschöpfende Suche** oder **binäre Suche** nach dem maximalen oder minimalem Wert gesucht, für den das Entscheidungsproblem noch die Antwort „Ja“ liefert.

Ein Entscheidungsproblem kann meist so als Optimierungsproblem formuliert werden, dass man mittels des Wissens über den Optimalwert sofort entscheiden kann, ob es sich bei der Instanz um eine „Ja“-Instanz oder eine „Nein“-Instanz handelt.

Knotenüberdeckungen Das Problem der Knotenüberdeckung (englisch: Vertex Cover) und seine Varianten sind Probleme der Graphentheorie (siehe etwa [1, 2]). Zur Formulierung dieser Probleme betrachten wir einen ungerichteten einfachen Graphen $G = (V, E)$. Eine Knotenteilmenge $U \subseteq V$ heisst **Knotenüberdeckung** von G, falls jede Kante aus E zu mindestens einem Knoten aus U inzident ist, also mindestens einen Endknoten in U besitzt. Die Kardinalität der Knotenüberdeckung $|U|$ wird **Grösse** der Knotenüberdeckung genannt. Man formuliert folgendes Entscheidungsproblem:

Das Entscheidungsproblem der Knotenüberdeckung
Eine Instanz besteht aus einem einfachen Graphen $G = (V, E)$ und einer natürlichen Zahl $k \leq |V|$. Besitzt G eine Knotenüberdeckung der Grösse k?

Fügt man zu einer Knotenüberdeckung beliebige weitere Knoten des Graphen hinzu, so ist die erhaltene Knotenmenge offenbar ebenfalls eine Knotenüberdeckung. Entsprechend kann „Besitzt G eine Knotenüberdeckung der Grösse k?“ ersetzt werden durch „Besitzt G eine Knotenüberdeckung der Grösse höchstens k?“ Damit macht es Sinn, nach Knotenmengen möglichst kleiner Grösse (also mit möglichst wenigen Knoten) zu fragen.

Das Optimierungsproblem der Knotenüberdeckung
Eine Instanz besteht aus einem einfachen Graphen G. Bestimme die Grösse der kleinsten Knotenüberdeckung von G.

Beispiel. Abbildung I zeigt einen Graphen G mit einer Knotenüberdeckung der Grösse vier. $(G, 4)$ ist eine „Ja“-Instanz des Entscheidungsproblems der Knotenüberdeckung. G hat auch eine Knotenüberdeckung der Grösse drei, deswegen ist die angegebene Knotenauswahl keine optimale Lösung des Optimierungsproblems. Drei ist der Optimalwert des Optimierungsproblems.

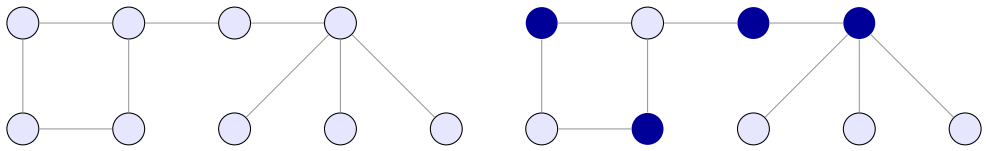

Abbildung I: Ein Graph (links) mit einer markierten Knotenüberdeckung (rechts).

Sowohl zum Entscheidungs-, als auch zum Optimierungsproblem lässt sich ein zugehöriges Suchproblem definieren: „Finde eine Knotenüberdeckung der Grösse k.“, bzw. „Finde eine Knotenüberdeckung deren Grösse so klein wie möglich ist.“

Das Entscheidungsproblem der Knotenüberdeckung ist NP-vollständig. Es gehört zu Karps berühmter Liste der 21 klassischen NP-vollständigen Probleme [10].

1.4 Anknüpfungspunkte, Spezialfälle und verwandte Probleme

In nachfolgenden Lektionen kann die Besprechung des Optimierungsproblems der Knotenüberdeckung vertieft und die enge Verwandtschaft zum Entscheidungsproblem aufgezeigt werden. So lernen die Schülerinnen und Schüler eine erste explizite, völlig einsichtige **Problemreduktion** kennen. Offenbar kann das Optimierungsproblem mithilfe von linear (in der Anzahl der Knoten) vielen Entscheidungsprobleminstanzen gelöst werden. Statt des allgemeinen Lösungsverfahrens der **erschöpfenden Suche** nach dem Optimum kann auch **binäre Suche** angewendet werden, dann werden nur logarithmisch viele Entscheidungsprobleminstanzen benötigt. Hier kann u.U. auch auf die Datenstruktur des **binären Suchbaumes** eingegangen werden. Weitere spannend zu erforschende Algorithmen, wie etwa **Greedy-Algorithmen** zum Finden einer (möglicherweise nicht optimalen) Knotenüberdeckung, bieten sich ebenfalls als Folgethemen an.

Je nach Vorwissen und Interessen der Schülerinnen und Schüler sowie dem zur Verfügung stehenden Lektionsumfang kann daraufhin auf weitere Entscheidungsprobleme (viele Beispiele aus Mathematik und Informatik siehe etwa in [8]) und **unentscheidbare Probleme** (ebenfalls in [8]) eingegangen werden.

Weitere mögliche Anknüpfungspunkte für den Unterricht sind in **polynomieller** Zeit lösbare **Spezialfälle** des Knotenüberdeckungsproblems. Durch deren Behandlung kann verdeutlicht werden, dass der Problembegriff sich entscheidend auf das Konzept der zulässigen Eingabeinstanzen stützt. Ausserdem kann darauf eingegangen werden, wie andere Entscheidungsprobleme mittels **polynomieller Reduktionen** auf das Entscheidungsproblem der Knotenüberdeckung zurückgeführt werden können. Es folgt ein kurzer Abriss dieser beiden möglichen Folgethemen.

Spezialfälle der Knotenüberdeckung Kőnig zeigte 1931, dass in **bipartiten** Graphen der optimale Wert des Optimierungsproblems der Knotenüberdeckung der Grösse eines Matchings mit maximaler Kardinalität entspricht [5]. Ein Beispiel für dieses Resultat ist in Abbildung II dargestellt. Die Grösse eines Matchings mit maximaler Kardinalität kann effizient bestimmt werden, das zugehörige Entscheidungsproblem gehört zur Komplexitätsklasse P. Deswegen kann man auch das Optimierungsproblem der Knotenüberdeckung in bipartiten Graphen effizient lösen.

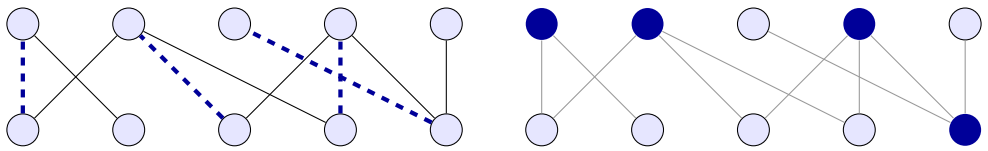

Abbildung II: Ein bipartiter Graph mit einem Matching der maximalen Grösse 4 und einer kleinstmöglichen Knotenüberdeckung der Grösse 4.

Allgemeiner ist auf der wichtigen Graphklassen der **perfekten Graphen** das Optimierungsproblem der Knotenüberdeckung (und damit auch das Entscheidungsproblem) effizient lösbar [3]. Ein Graph heisst perfekt, wenn für jeden induzierten Teilgraphen die Cliquenzahl (Grösse der grössten induzierten Clique) übereinstimmt mit der chromatischen Zahl des Teilgraphen (minimale Anzahl an Farben, die für eine zulässige Knotenfärbung nötig ist). Eine ausführliche Behandlung perfekter Graphen findet sich in [4]. Bipartite Graphen (und somit auch **Bäume** und **Wälder**) gehören zu den perfekten Graphen.

Verwandte Probleme und polynomielle Reduktionen Das vorliegende Thema eignet sich, um Bezüge zwischen den **Komplexitätsklassen $\boldsymbol{P}$**, **$\boldsymbol{NP}$**, **$\boldsymbol{NP}$-schwer** und **$\boldsymbol{NP}$-vollständig** anhand von einfachen Beispielen herzustellen und so diese Komplexitätsklassen einzuführen. Als gutes Beispiel eignen sich hierfür etwa die Reduktionen zwischen dem Knotenüberdeckungsproblem und dem eng verwandten **Problem der stabilen Knotenmenge**.

Eine Knotenteilmenge $U \subseteq V$ heisst **stabile Menge** in G, falls jede Kante aus E zu höchstens einem Knoten aus U inzident ist. Die Menge $U \subseteq V$ ist eine Knotenüberdeckung von G genau dann wenn $V \setminus U$ eine stabile Menge in G ist. Insbesondere addieren sich die Grösse der kleinsten Knotenüberdeckung und die Grösse der grössten stabilen Menge eines Graphen zur Anzahl seiner Knoten $|V|$.

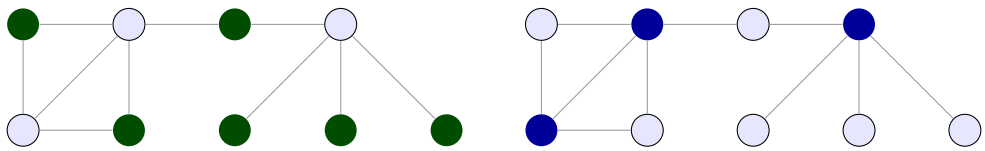

Abbildung III: Ein Graph mit einer maximalen stabilen Menge (links). Derselbe Graph mit einer minimalen Knotenüberdeckung (rechts).

Damit lässt sich das Entscheidungsproblem der Knotenüberdeckung polynomiell reduzieren auf das Entscheidungsproblem der stabilen Menge, deswegen ist auch das Entscheidungsproblem der stabilen Menge NP-schwer. Es ist ebenfalls NP-vollständig, die Reduktion ist auch in umgekehrter Richtung möglich.

Damit kann das Thema bei der Herausbildung einer tiefergehenden algorithmischen Denkweise bei den Schülerinnen und Schülern helfen, siehe dazu auch [6]. Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler, beispielsweise in heterogenen Klassen, können weitere polynomielle Reduktionen erforschen. Hierfür bieten sich etwa die polynomiellen Reduktionen zwischen dem Problem der stabilen Knotenmenge und dem **Cliqueproblem** an. Hier muss der Graph in Verbindung zu seinem **Komplementärgraph** untersucht werden. Dies führt zur neuen und wichtigen Erkenntnis, dass sich bei einer Problemreduktion auch der Graph der Eingabeinstanz ändern darf.

2 Lernziele

Leitidee

Entscheidungsprobleme sind Grundlage und Kern der Komplexitätsbetrachtungen in der Theoretischen Informatik und damit zentral bei der Herausbildung einer algorithmischen Denkweise. Sinnvolle Definitionen von Reduktionen und Komplexitätsklassen wären ohne Entscheidungsprobleme kaum denkbar. Ihnen gegenüber stehen Optimierungsprobleme, die auf dem ersten Blick praktisch relevanter erscheinen. Tatsächlich sind die beiden Problemklassen eng verwandt.

Um Schülerinnen und Schüler an diese formale Begriffswelt heranzuführen, eignen sich Probleme aus der ihnen vertrauten Welt der Graphen. Mit deren Hilfe können Schülerinnen und Schüler im Problemmodellieren und algorithmischen Denken gut geschult werden, da sie sowohl leicht verständlich sind als auch erste anschauliche Problemreduktionen intuitiv richtig erscheinen. Als übergeordnetes Ziel sollen Schülerinnen und Schüler Probleme analysieren und zugehörige algorithmische Lösungen auf Korrektheit und Effizienz beurteilen können.

Dispositionsziele

Die Schülerinnen und Schüler verstehen, dass zur Charakterisierung der Schwere von Problemen eine genauere Formalisierung des Problembegriffs nötig ist und sind motiviert, diese kennenzulernen.

Anstatt mit unsystematischem Probieren nur zu einer befriedigenden Lösung zu kommen sind sie bestrebt, durch ein deterministisches Verfahren eine optimale Lösung zu erhalten. Ihnen ist dabei bewusst, dass ein Algorithmus mit kombinatorisch explosiver Laufzeit kein effizientes Lösungsverfahren ist.

Nach dem Studium der Materialien interessieren sich Schülerinnen und Schüler für die Unterscheidung in Entscheidungs- und Optimierungsprobleme und sind bestrebt, zu einer gegebenen Problemformulierung auch die andere Problemvariante zu formulieren.

Operationalisierte Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler erklären interessierten Laien ohne spezifische Vorbildung in ihren eigenen Worten anhand eines selbstgewählten Beispiels, was ein Entscheidungsproblem ist. Die Erklärung beinhaltet das Konzept der zulässigen Eingabeinstanz und die Unterscheidung in „Ja“-Instanzen und „Nein“-Instanzen.

Sie machen den Begriff der Knotenüberdeckung einer Mitschülerin oder einem Mitschüler mit Grundkenntnissen der Graphentheorie anhand der Abbildung eines einfachen Graphen verständlich.

Die Schülerinnen und Schüler veranschaulichen das Knotenüberdeckungsproblem einer Person ohne fachspezifisches Vorwissen, indem sie es durch ein Alltagsproblem motivieren.

In der graphischen Darstellung eines gegebenen einfachen Graphen zeichnen sie eine Knotenüberdeckung ein, die nicht aus allen Knoten besteht.

3 Literaturverzeichnis

Literatur zur Graphentheorie allgemein

[1] Reinhard Diestel. *Graphentheorie (4. Auflage).* Springer, 2010.

[2] Sven Oliver Krumke and Hartmut Noltemeier. *Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen (3.Auflage).* Springer Vieweg, 2012.

Literatur zum Knotenüberdeckungsproblem

[3] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics*, 164, 2006.

[4] Martin C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs.* Elsevier Science, 2004.

[5] Dénis Kőnig. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen: kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe.* Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A. Akademische Verlagsgesellschaft, 1936.

[6] Rolf Niedermeier, Jörg Vogel, Michael Fothe, and Mirko König. Das Knotenüberdeckungsproblem - eine Fallstudie zur Didaktik *NP*-schwerer Probleme. Manuskript: Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Friedrich-Schiller Universität Jena, 2006.

Literatur zu Problemformalisierungen und Komplexität

[7] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms (3rd edition).* The MIT Press, 2009.

[8] Juraj Hromkovič. *Berechenbarkeit.* Vieweg+Teubner Verlag, 2011.

[9] Juraj Hromkovič. *Theoretische Informatik (5.Auflage).* Springer Vieweg, 2014.

[10] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations*, pages 85–103, 1972.